

学习 笔记

王 宁

2003-6-10

第一章 SKYRME HARTREE-FORK 模型	3
§1.1 引言	3
§1.2 SKYRME 相互作用	4
§1.3 SKYRME-HARTREE-FOCK 方程	5
§1.4 SKYRME 参数的确定	8
第二章 费米气体模型	14
§2.1 模型简介	14
§2.2 粒子间的关联以及库仑能的交换修正 [1]	15
第三章 经典散射描述	17
§3.1 核子核子碰撞	17
§3.2 散射截面[47]	21
§3.3 核核相互作用势的理论计算 [1]	23
§3.4 准弹性散射以及熔合的实验测量	25
§3.4.1 能量和时间的测量[56]	26
§3.4.2 入射束流的监视以及重离子反应截面的归一	27
§3.4.3 熔合截面的实验测量	29

第一章 Skyrme Hartree-Fock 模型

§1.1 引言

为了研究核结构及核反应，人们采用了各种近似方法来处理核多体问题。其中一种称为独立粒子近似，假设每个核子都在其它核子的平均场作用下独立运动[1]。各种实验事实表明，这是原子核在基态和低激发态的主要运动形式之一。在理论上，由于泡利原理的限制，核子在核内和其它核子交换能量和动量的几率比较小，因此独立粒子运动是一个比较好的近似，它构成了核多体理论的一个出发点。

单粒子运动的哈密顿量可以写成

$$\hat{H} = -\frac{\mathbf{h}^2}{2M} \nabla^2 + V, \quad (1.1.1)$$

而波函数 \mathbf{y}_i 和能级 \mathbf{e}_i 由薛定谔方程给出

$$\hat{H}\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{y}_i. \quad (1.1.2)$$

关于平均场 V 可以有两种选择方法。可以选择某种唯象的单粒子势，如谐振子或 Woods-Saxon 势和适当的自旋轨道耦合势，确定其中的参数；也可以采用 Hartree-Fock 近似，由两体相互作用求平均场，这也是本章讨论的重点。在独立粒子近似下，单粒子能级分布以及各能级的简并度一般会出现不均匀的现象。人们把比较密集的能级列为一个能级组，称为一个壳层，而两壳层之间则有一个明显的能隙。具有这种单粒子态的能级结构称为壳层结构。独立粒子近似是壳模型的基础，而壳模型的成功则在事实上证明了独立粒子近似的正确性。

凡是从包含核子-核子相互作用的核多体哈密顿量的某种近似解出发的理论，都可以认为是微观理论。Hartree-Fock 可以说是微观理论的基础，它在求平均场时考虑了自由核子之间的相互作用具有很强的排斥芯。利用 HF 方法可以计算核的基态属性例如结合能、方均根半径以及单粒子能级等等。而计算过程中最主要的就是如何选取核子间的相互作用势。经过长期的摸索，目前主要有两种途径：一是从自由核子间的实际相互作用出发，求得等效的位势来进行 HF 计算，另一种途径是采用唯象的密度有关势，如 Skyrme 势。

从自由核子间的实际相互作用出发的 HF 方法虽然在壳模型计算中给出了一些好的结果，然而这个方法存在一定的缺陷：一方面由 HF 以及 BHF (Brueckner-Hartree-Fock) 方法计算不能给出正确的结合能和方均根半径；另一方面它的数学实现相当复杂而且对于微扰展开的收敛性也存在一定的问题[2]。

而 Skyrme-HF 模型则是直接从有效的、参数化的 d 相互作用出发，经过拟和参数来处理核多体问题。Skyrme 相互作用具有以下优点：首先，它采用的 d 函数形式的相互作用能够使得 Hartree-Fock 方程中通常的非局域的 Fork 项局域化，从而使得 Hartree-Fock 方程非常容易计算[3,4]，而且这种相互作用的特殊形式使得相应的 Hartree-Fock 方程数值解要比采用有限力程力的数值解快许多。在采用随机相近似 (RPA) 的计算中， d 相互作用能够使得计算在坐标空间而不是在组态空间展开，从而计算中矩阵的维数仅仅依赖于我们需用的算符的数目而不是组态的数目。这就允许我们尽可能多地包括粒子-空穴组态，从而可以计算重核如 ^{208}Pb 的激发态。其二，Skyrme 参数直接与 Landau 参数相关[5]。这一点是很重要的，因为 Landau 参数是众所周知的，它其中的一些参数与物理量有直接的关联。其三，这种类型的相互作用能够很好地再现一系列核的基态属性如结合能、方均根半径、单粒子能级等等。正因为 Skyrme 相互作用的诸多优点，所以近几十年来，Skyrme-HF 模型得到了广泛地应用和发展：从研究低密度核物质到中子星[6]；从研究核基态性质到液汽相变[7]；从研究稳定线上的元素到滴线附近的元素都得到了很好的结果；而且人们对 Skyrme 相互作用各项的理解、计算方法的完善以及参数的确定都有了很大的发展。

§1.2 Skyrme 相互作用

为了考虑核内的多体相互作用，一般的唯象势可以写为：

$$V = \sum_{i<j} V_{ij}^{(2)} + \sum_{i<j<k} V_{ijk}^{(3)}。 \quad (1.2.1)$$

早期的 Skyrme 相互作用的两体项和三体项分别写成[2]：

$$v_{12}^{(2)} = t_0(1 + x_0 P_s) d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{1}{2} t_1 [d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) k^2 + k'^2 d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \quad (1.2.2)$$

$$+ t_2 \mathbf{k}' \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} + i W_0 (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{k}' \times d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}$$

$$v_{123}^{(3)} = t_3 d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (1.2.3)$$

其中 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 是两核子的相对波矢, $\mathbf{k} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/2i$ 作用于右边, $\mathbf{k}' = -(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/2i$ 作用于左边, $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ 是泡利自旋矩阵, $P_s = (1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)/2$ 是自旋交换算符。 t_0 项给出中心吸引势; t_1, t_2 项为动量相关项, t_0 和 t_1 项体现了 S 态与 D 态的一部分相互作用, 而 t_2 项对应于 P 态的相互作用; W_0 项是自旋轨道耦合项; x_0 项与质子-中子不对称性引起的对称能有关。 t_3 项不应该看为真正的三体力, 它只是能够提供一种简单的、唯象的多体力的效应, 因为它等同于密度依赖的两体相互作用:

$$v_{123}^{(3)} = t_3 \mathbf{d}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{d}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{1}{6} t_3 (1 + P_s) \mathbf{d}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) r \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \quad (1.2.4)$$

所以从本质上看它是一种密度依赖的有效相互作用。

通过符合球形满壳核的基态性质如结合能、方均根半径、单粒子能级等, 来选取 $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0, W_0$ 这六个参数。在后面我们将列出 SIII[4] 这套 Skyrme 参数以及基于这些参数 Skyrme-HF 模型计算出来的一些基态核的总的结合能和方均根半径。我们将会看到 SIII 相互作用能相当好地描述满壳核的基态属性。

后来人们在研究核的各种振动模式中, 特别是巨共振中发现由以前的 Skyrme 相互作用得到的核物质的不可压缩系数 K_∞ 过大, 并且得到的自旋振动属性也不理想。于是人们对原有 Skyrme 相互作用进行了改进, 降低了密度依赖项的指数 (如 $s = 1 \rightarrow s = 1/6$) [5,6,8,9], 并且在速度相关部分引入了自旋交换项。这样, Skyrme 相互作用的“标准”形式就写成:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & t_0 (1 + x_0 P_s) \mathbf{d}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} t_1 (1 + x_0 P_s) [d(\mathbf{r}) k^2 + k'^2 d(\mathbf{r})] \\ & + t_2 (1 + x_2 P_s) \mathbf{k}' \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}) \mathbf{k} + \frac{1}{6} t_3 (1 + x_3 P_s) \mathbf{d}(\mathbf{r}) [r(R)]^s \\ & + i W_0 \mathbf{S} \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{d}(\mathbf{r}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $R = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ 。

§1.3 Skyrme-Hartree-Fock 方程

对于 Skyrme 相互作用, Hartree-Fock 方程可以通过一个简单的方法导出来[2]。

考虑到基态核可以由单粒子态 f_i 所组成的行列式表示：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det | f_i(x_j) | \quad (1.3.1)$$

其中 x 代表着空间 \mathbf{r} 、自旋 \mathbf{s} 以及同位旋 q 这一组坐标。

则总能量的期望值为

$$E = \langle f | T + V | f \rangle = \sum_{i=1}^A \langle i | \frac{p^2}{2m} | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij | \mathcal{V}_{12} | ij \rangle + \frac{1}{6} \sum_{ijk} \langle ijk | \mathcal{V}_{123} | ijk \rangle = \int H(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.3.2)$$

其中 \mathcal{V} 表示反对称化矩阵元。Skyrme 相互作用中，能量密度是核子密度 $r_n(\mathbf{r}_p)$ ，动能密度 $t_n(t_p)$ 以及自旋密度 $\mathbf{J}_n(\mathbf{J}_p)$ 的函数。这些量反过来依赖于单粒子波函数 f_i ，

$$r_q(\mathbf{r}) = \sum_{i,s} | f_i^q(\mathbf{r}, \mathbf{s}, q) |^2 n_i^q, \quad (1.3.3)$$

$$t_q(\mathbf{r}) = \sum_{i,s} | \nabla f_i^q(\mathbf{r}, \mathbf{s}, q) |^2 n_i^q, \quad (1.3.4)$$

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) = (-i) \sum_{i,s,s'} f_i^{q*}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, q) [\nabla f_i^q(\mathbf{r}, \mathbf{s}', q) \times \langle \mathbf{s} | \mathbf{S} | \mathbf{s}' \rangle] n_i^q. \quad (1.3.5)$$

其中 $f_i^q(\mathbf{r}, \mathbf{s}, q)$ 是考虑坐标、自旋以及同位旋的单粒子波函数， n_i^q 是相应的态

$f_i^q(\mathbf{r}, \mathbf{s}, q)$ 的粒子占有数。

能量密度 $H(\mathbf{r})$ 的具体形式可以写为[6]：

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} t + H_0 + H_3 + H_{eff} + H_{surf} + H_{so} + H_{sg} + H_{Coul} \quad (1.3.6)$$

$\frac{\hbar^2}{2m} t$ 是动能项， H_0 是零程项， H_3 是密度依赖项， H_{eff} 是动量相关项， H_{surf} 是表面项，

H_{so} 是自旋轨道耦合项， H_{sg} 是自旋梯度张量耦合项， H_{Coul} 是库仑项。它们各自的表

达式为：

$$H_0 = \frac{1}{4} t_0 [(2 + x_0) r^2 - (2x_0 + 1)(r_p^2 + r_n^2)], \quad (1.3.7)$$

$$H_3 = \frac{1}{24} t_3 r^s [(2 + x_3) r^2 - (2x_3 + 1)(r_p^2 + r_n^2)], \quad (1.3.8)$$

$$H_{eff} = \frac{1}{8} [t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)] tr + \frac{1}{8} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)](t_n r_n + t_p r_p), \quad (1.3.9)$$

$$H_{surf} = \frac{1}{32}[3t_1(2+x_1) - t_2(2+x_2)](\nabla \mathbf{r})^2 - \frac{1}{32}[3t_1(2x_1+1) + t_2(2x_2+1)][(\nabla \mathbf{r}_p)^2 + (\nabla \mathbf{r}_n)^2], \quad (1.3.10)$$

$$H_{so} = \frac{1}{2}W_0[\mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{r} + \mathbf{J}_p \cdot \nabla \mathbf{r}_p + \mathbf{J}_n \cdot \nabla \mathbf{r}_n], \quad (1.3.11)$$

$$H_{sg} = \frac{1}{16}(t_1x_1 + t_2x_2)J^2 + \frac{1}{16}(t_1 - t_2)[J_p^2 + J_n^2], \quad (1.3.12)$$

$$H_{Coul}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2}r_p(\mathbf{r}) \int \frac{r_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \frac{3}{4}e^2 \left(\frac{3}{p}\right)^{1/3} r_p^{1/3}(\mathbf{r}), \quad (1.3.13)$$

$$\text{其中 } \mathbf{r} = \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_p, \mathbf{t} = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_p, \mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_p. \quad (1.3.14)$$

在对称核体系中

$$N = Z, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_p = \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_p = \frac{1}{2}\mathbf{t}, \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_p = \frac{1}{2}\mathbf{J}. \quad (1.3.15)$$

能量密度简化为:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{t} + \frac{3}{8}t_0r^2 + \frac{1}{16}t_3r^{s+2} + \frac{1}{16}(3t_1 + 5t_2)\mathbf{r}\mathbf{t} + \frac{1}{64}(9t_1 - 5t_2)(\nabla \mathbf{r})^2 - \frac{3}{4}W_0\mathbf{J} \cdot \nabla \mathbf{r} + H_{Coul}, \quad (1.3.16)$$

这里我们忽略了 \mathbf{J}^2 项的影响。

Skyrme 相互作用的 Hartree-Fock 方程是通过变分原理由总能量 E 相对于单粒子

$$\text{波函数变分的不变性 } \frac{d}{df_i} (E - \sum_i e_i \int |f_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}) = 0 \quad (1.3.17)$$

以及考虑波函数的归一化得到的 (详细推导参见文献[2])

$$[-\nabla \cdot \frac{\hbar^2}{2m_q^*(\mathbf{r})} \nabla + U_q(\mathbf{r}) + \mathbf{W}_q(\mathbf{r}) \cdot (-i)(\nabla \times \mathbf{S})]f_i = e_i f_i. \quad (1.3.18)$$

其中, 单体势 $U_q(\mathbf{r})$ 、有效质量 m_q^* 以及自旋轨道势 $\mathbf{W}_q(\mathbf{r})$ 各自的定义为[7]:

$$\begin{aligned} U_q(\mathbf{r}) &= \frac{dH(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}_q(\mathbf{r})} = \frac{1}{2}t_0[(2+x_0)\mathbf{r} - (2x_0+1)\mathbf{r}_q] \\ &\quad + \frac{1}{8}[t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)]\mathbf{t} + \frac{1}{8}[t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)]\mathbf{t}_q \\ &\quad - \frac{1}{16}[3t_1(2+x_1) - t_2(2+x_2)]\Delta \mathbf{r} + \frac{1}{16}[3t_1(2x_1+1) + t_2(2x_2+1)]\Delta \mathbf{r}_q \\ &\quad + \frac{1}{24}t_3(2+x_3)(\mathbf{s}+2)r^{s+1} - \frac{1}{24}t_3(2x_3+1)[\mathbf{s}r^{s-1} \sum_q \mathbf{r}_q^2 + 2r^s \mathbf{r}_q] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}W_0(\text{div} \cdot \mathbf{J} + \text{div} \cdot \mathbf{J}_p) \\
& + [e \int \frac{\mathbf{r}_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - (\frac{e}{p})^{1/3} \mathbf{r}_p^{1/3}(\mathbf{r})] d_{qp}, \tag{1.3.19}
\end{aligned}$$

$$\frac{m_q^*(\mathbf{r})}{m} = \left\{ 1 + \frac{2m}{\mathbf{h}^2} \left[\frac{1}{8} [t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)] \mathbf{r} - \frac{1}{8} [t_1(2x_1+1) - t_2(2x_2+1)] \mathbf{r}_q \right] \right\}^{-1}, \tag{1.3.20}$$

$$\mathbf{W}_q(\mathbf{r}) = \frac{dH_q(\mathbf{r})}{d\mathbf{J}_q(\mathbf{r})} = \frac{1}{2} W_0 (\nabla \mathbf{r} + \nabla \mathbf{r}_p) \tag{1.3.21}$$

从 Skyrme 相互作用的能量密度的动量相关项 H_{eff} 的表达式中可以看出有效质量是与密度相依赖的，它对于单粒子能级有重要的影响，而且它能很大地决定高密度的行为 [6]。 H_{surf} 是表面项，它体现了有限力程效应，由于它与密度的梯度有关，可以知道它对于核体系的表面效应是非常重要的，表面弥散和表面能的大小由 H_{surf} 的系数决定，系数越大，给出的表面厚度也越大 [2]。自旋轨道耦合项 H_{so} 对于体系的壳效应起关键作用。库仑项 H_{Coul} 包括直接项和交换项，库仑力的长程性使得交换项对于总的库仑能的贡献很小（小于 10% 对于 $A > 40$ [10]），因此为了保持 Skyrme-HF 方程的简单性，库仑交换项采取了 Slater 近似 [4,6,9]。

§1.4 Skyrme 参数的确定

前面提到 Skyrme 相互作用不是真正的核子核子相互作用，而是一种唯象的、参数化的、有效的相互作用。为了更好地了解核多体系统中真实的核子核子相互作用与有效的相互作用之间的联系，很多工作通过结合基本的物理属性如无限核物质的饱和性、核的结合能、方均根半径以及其它一些实验信息来构建不同的 Skyrme 参数并且研究它们对于原子核属性的影响 [2~6,8~9]。

在继 Vautherin 和 Brink 的工作之后，很快就提出了 SIII 这一组 Skyrme 参数 [4]，它基本上能够成功地描述整个核素图上元素的一些基态性质。后来实验上通过测量巨同位旋标量单极共振—呼吸模式，可以提供核物质的不可压缩性方面的一些知识，而

以前的 Skyrme 参数对核物质的不可压缩性 K_∞ 估计过大，基于对 K_∞ 方面的一些信息的考虑，Krivine 等人提出了 SkM 相互作用[8]。再后来通过研究铜系元素的裂变位垒，更新了 SkM 相互作用中表面张力对应的参数，产生了 SkM* 相互作用。Sly 系列的 Skyrme 相互作用是为了研究原子核沿同位旋自由度出现一些性质而产生的[6]，它不但能够符合稳定线上的元素的基本性质而且能够符合质子滴线以及中子滴线附近奇异元素的基本性质。

Skyrme 参数的确定首先应该从对称无限核物质属性入手，包括饱和密度、相应的每粒子能量以及不可压缩系数；其次考虑不对称核物质属性，包括对称能、有效质量等；最后再考虑有限核的性质，如基态核的结合能、方均根半径等[6]。下面我们主要从这三个方面来讨论 Skyrme 参数：

1. 对称的无限核物质可以由足够大体积 V 中的费米气体来表示（可以忽略其表面效应）。在零温时，每个核子的能量可以通过能量密度 $H(\mathbf{r})$ 来表示

$$\frac{E}{A}(\mathbf{r}) = \frac{V}{A} H(\mathbf{r}) = \frac{H(\mathbf{r})}{r} \quad (1.4.1)$$

每个粒子的平均动能为 $\frac{3}{5}e_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2$ ，其中 e_F 是费米能，由费米气体模型[11]可以知

道密度 $r = A/V$ 与费米动量 k_F 之间的关系

$$r = \frac{2}{2p^2} k_F^3. \quad (1.4.2)$$

对于对称无限核物质，通过 Skyrme 相互作用的能量密度可以得到每个核子的能量

$$\frac{E}{A}(\mathbf{r}) = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{2/3} + \frac{3}{8} t_0 r + \frac{1}{16} t_3 r^{s+1} + \frac{3}{80} C_1 \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{5/3}, \quad (1.4.3)$$

其中 $C_1 = 3t_1 + (5 + 4x_2)t_2$ 。

由液滴模型[12]体积能项的系数 a_v 可以估计出饱和密度下每个粒子的能量：

$$\frac{E}{A}(\mathbf{r}_0) = a_v \approx -16 \text{ MeV}, \quad (1.4.4)$$

另一方面核流体的压强为

$$P = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_A = \frac{A}{V^2} \left. \frac{\partial E}{\partial r} \right|_A = r^2 \left. \frac{\partial (E/A)}{\partial r} \right|_A \quad (1.4.5)$$

则有：

$$P(r) = r \left\{ \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{2/3} + \frac{3}{8} t_0 r + \frac{1}{16} t_3 (s+1) r^{s+1} + \frac{1}{16} C_1 \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{5/3} \right\}。 \quad (1.4.6)$$

在饱和密度时，这个压强必须为零

$$P = r_0^2 \frac{d}{dr} \frac{E}{A} (r) \Big|_{r=r_0} = 0。 \quad (1.4.7)$$

而饱和密度可以由实验测量重核的密度分布得到 $r_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ 。

通过核流体的压强，我们可以得到核的不可压缩系数

$$K = 9 \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_A = \frac{18P}{r} + 9r^2 \frac{\partial^2 (E/A)}{\partial r^2}。 \quad (1.4.8)$$

在平衡密度 r_0 下，上式的第一项消失，则核物质的不可压缩系数为[6]

$$\begin{aligned} K_\infty &= 9r_0^2 \frac{\partial^2 (E/A)}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} \\ &= -\frac{3\hbar^2}{5m} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r_0^{2/3} + \frac{9}{16} t_3 s (s+1) r_0^{s+1} + \frac{3}{8} C_1 \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r_0^{5/3} \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

通过其它理论模型以及实验测量核的振动模式得到了核的不可压缩系数

$$K_\infty \approx 210 \text{ MeV}。 \quad (1.4.10)$$

从上面 K_∞ 的表达式可以看到，密度依赖项的系数 t_3 随核的不可压缩形呈线性增加，

而且 Skyrme-HF 计算出来的一些满壳核的方均根半径也随着 t_3 的增加而增加[4]。另

外密度依赖项的指数 s 对 K_∞ 也有相当大地影响，为了使 K_∞ 的变化范围比较合理，

人们将早期的 Skyrme 相互作用中密度依赖项的指数从 $s = 1$ 降低为 $s = 1/6$ 。

2. 对于不对称无限核物质，每粒子的能量与体系的质子中子不对称程度

$I = (N - Z) / A$ 存在以下的关系[6]：

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{A}(r, I) &= \frac{3\hbar^2}{10m} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{2/3} f_{5/3} \\
 &+ \frac{1}{8} t_0 r [2(x_0 + 2) - (2x_0 + 1) f_2] + \frac{1}{48} t_3 r^{s+1} [2(x_3 + 2) - (2x_3 + 1) f_2] \\
 &+ \frac{3}{40} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{5/3} \left\{ [t_1(x_1 + 2) + t_2(x_2 + 2)] f_{5/3} + \frac{1}{2} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)] f_{8/3} \right\}
 \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

其中的不对称因子定义如下： $f_m(I) = \frac{1}{2} [(1+I)^m + (1-I)^m]$

由每粒子能量可以得到对称能系数

$$\begin{aligned}
 a_s &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 (E/A)}{\partial I^2} \right|_{I=0} = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{2/3} + \frac{1}{8} t_0 (2x_0 + 1) r \\
 &- \frac{1}{48} t_3 (2x_3 + 1) r^{s+1} + \frac{1}{24} C_2 \left(\frac{3p^2}{2} \right)^{2/3} r^{5/3}
 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

其中 $C_2 = 3t_1x_1 - t_2(5 + 4x_2)$ 。由液滴模型得到的对称能系数 $a_s \approx 32 \text{ MeV}$ 可以进一步约束 Skyrme 参数中体现质子中子不对称性的几个参数 x_0, x_1, x_2, x_3 以及 t_1, t_2 。

3. 对于有限核体系，我们应该考虑的核的基本属性有，基态核的结合能、方均根半径以及单粒子能级等等。下面我们列出几组比较常用的 Skyrme 参数并且给出它们对应的核物质的基本性质以及有它们计算出来的一些满壳核的基态结合能核方均根半径。

从表 1.3 中的结合能与方均根半径与实验数据比较的结果可以看出这几套 Skyrme 参数都能相当好地描述基态满壳核的属性。另外从这三套参数计算出来的核的不可压缩系数来看，SIII 给出的 K_∞ 明显大于另外两组， K_∞ 很大程度上取决于密度依赖项的指数 σ 以及系数 t_3 的取值。自旋轨道耦合系数 W_0 一般通过比较自旋饱和核 (^{16}O 、 ^{40}Ca) 与自旋不饱和核 (^{48}Ca 、 ^{208}Pb)^[4] 或者由 ^{208}Pb 的中子能级 $3p \frac{1}{2} - 3p \frac{3}{2}$ 劈裂^[6]来调整，基本上取 $W_0 \approx 125 \text{ MeVfm}^5$ 。

表 1.1 几套常用的 Skyrme 参数

Skyrme 参数	SIII ^[4]	SkM* ^[9]	Sly7 ^[6]
$t_0 (\text{MeVfm}^3)$	-1128.75	-2645.00	-2482.41
$t_1 (\text{MeVfm}^5)$	395.00	410.00	457.97

$t_2 (MeVfm^5)$	-95.00	-135.00	-419.85
$t_3 (MeVfm^7)$	14000.00	15595.00	13677.0
x_0	0.45	0.09	0.846
x_1	0.00	0.00	-0.511
x_2	0.00	0.00	-1.000
x_3	1.00	0.00	1.391
σ	1	1/6	1/6
$W_0 (MeVfm^5)$	120.0	130.0	126.0

表 1.2 几套常用的 Skyrme 参数所对应的核物质性质

Skyrme 参数	SIII ^[4]	SkM* ^[9]	Sly7 ^[6]
$\rho_0 (fm^{-3})$	0.145	0.160	0.158
$(E/A)_\infty (MeV)$	-15.851	-15.770	-15.894
$K_\infty (MeV)$	355.4	216.6	229.7
$(m^*/m)_\infty$	0.76	0.79	0.69
$a_s (MeV)$	28.16	30.03	31.99

表 1.3 几套常用的 Skyrme 参数计算出来的满壳核的结合能和方均根半径

		^{16}O	^{40}Ca	^{48}Ca	^{56}Ni	^{90}Zr	^{208}Pb
结合能 (<i>MeV</i>)	实验值	-127.62	-342.05	-415.99	-483.99	-783.92	-1636.44
	SIII	-128.21	-341.88	-418.21	-483.64	-782.66	-1636.61
	SkM*	-127.73	-341.05	-420.00	-485.35	-781.89	-1636.15
	Sly7	-128.55	-344.90	-415.88	-482.22	-784.32	-1636.76
方均根 半径 (<i>fm</i>)	实验值	2.73	3.49	3.48	3.75	4.27	5.50
	SIII	2.69	3.48	3.53	3.79	4.32	5.57
	SkM*	2.79	3.50	3.50	3.76	4.26	5.49
	Sly7	2.75	3.47	3.50	3.76	4.25	5.50

从这几套参数的比较我们可以看出,这几套参数都能较好地描述基态的满壳核的结合能和方均根半径。早期提出来的 SIII 参数(1975 年)给出的核的不可压缩系数明显偏大。后来提出来的 SkM*和 Sly7 两套参数的不可压缩系数以及核物质的饱和密度比较靠近。SkM*参数更注重核表面性质的描述,而 Sly7 则偏重于质子中子不对称度引起的同位旋效应的描述。

第二章 费米气体模型

§2.1 模型简介

费米气体模型[11,32]是把原子核看成没有相互作用的费米气体,它们被均匀的平均场约束在一个区域。为了计算方便,将这个区域看成边长为 a 的方盒子,并且盒壁为无限高势垒。则盒壁上的单粒子波函数应为0。取盒子的一角为坐标原点,则波函数可以写为:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{(a/2)^{3/2}} \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \quad (2.2.1)$$

其中 $k_x a = n_x \pi$, $k_y a = n_y \pi$, $k_z a = n_z \pi$, n_x, n_y, n_z 为正整数。

动量 k 对应的动能为 $\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$,在 k 到 dk 之间的总状态数为

$$dn(k) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \frac{4\pi}{8} k^2 dk. \quad (2.2.2)$$

如果费米动量 k_F 为核子的最大动量,则 $k \leq k_F$ 的总状态数为

$$n(k_F) = \frac{4\pi}{3} \frac{k_F^3 a^3}{(2\pi)^3}. \quad (2.2.3)$$

假设原子核的质子数等于中子数,并且考虑自旋兼并度,则 $A = 4n$,核子的平均密度为

$$r = \frac{A}{a^3} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3. \quad (2.2.4)$$

利用实验上测量得到的重核的平均密度 $r \approx 0.165 \text{ fm}^{-3}$,则相应的费米动量为

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2}{2} r\right)^{1/3} \approx 1.35 \text{ fm}^{-1}. \quad (2.2.5)$$

相应的费米动能为

$$e_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2M} \approx 38 \text{ MeV}, \quad (2.2.6)$$

核子的平均动能为

$$\bar{e} = \frac{3}{5} e_F \approx 22 \text{ MeV}. \quad (2.2.7)$$

§2.2 粒子间的关联以及库仑能的交换修正 [1]

我们知道核子属于费米子，需要用反对称化的波函数，如 Slater 行列式来描述。为了讨论方便，我们下面只讨论 Z 个质子组成的体系，并采用满足周期性边界条件的单粒子波函数

$$y_{ic} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(ik_i \cdot \mathbf{r}) c. \quad (2.2.8)$$

其中 c 为自旋波函数，可以取 $\pm 1/2$ 两个态， $k = \frac{2p}{a} \mathbf{n}$ 。

单体密度算符为

$$\hat{r}(\mathbf{r}) = \sum_i d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.2.9)$$

则质子密度

$$r(\mathbf{r}) = \int y^* \hat{r} y d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_z = \sum_{i,c} y_{ic}^*(\mathbf{r}) y_{ic}(\mathbf{r}) = \frac{k_F^3}{3p^2} = \frac{Z}{\Omega}. \quad (2.2.10)$$

两体关联密度算符为

$$\hat{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i \neq j} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j), \quad (2.2.11)$$

则两体关联密度

$$\begin{aligned} r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int y^* \hat{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') y d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_z \\ &= \left[\sum_{i,c} y_{ic}^*(\mathbf{r}) y_{ic}(\mathbf{r}) \right]^2 - \sum_{i,c} \sum_{j,c'} [y_{ic}^*(\mathbf{r}) y_{jc'}(\mathbf{r})] [y_{jc'}^*(\mathbf{r}') y_{ic}(\mathbf{r}')] \\ &= (Z/\Omega)^2 - f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\text{其中 } f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i,c} \sum_{j,c'} [y_{ic}^*(\mathbf{r}) y_{jc'}(\mathbf{r})] [y_{jc'}^*(\mathbf{r}') y_{ic}(\mathbf{r}')]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\Omega^2} \sum_{ij} \exp[ik_i \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + ik_j \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = \frac{2}{\Omega^2} \left| \frac{\Omega}{(2p)^3} \int_{k < k_F} \exp[ik \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] dk \right|^2 \\ &= 2 \left| \frac{k_F^3}{2p^2} \frac{1}{x^3} (\sin x - x \cos x) \right|^2, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

这里 $x = k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。利用关系式 $\frac{k_F^3}{3p^2} = \frac{Z}{\Omega}$ ，最后得到

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{9 Z^2}{2 \Omega^2} \left(\frac{1}{x^3} (\sin x - x \cos x) \right)^2. \quad (2.2.14)$$

从上式中可以看到，当 $x \gg 1$ 时，粒子间没有关联，但当 $x \rightarrow 0$ 时，关联密度为 $\frac{1}{2} \frac{Z^2}{\Omega^2}$ 。这是由于费米子所遵循的泡利原理要求两个自旋相同的质子不能占据空间同一点。

下面我们来计算库仑能 E_{coul}

$$E_{coul} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{r_z(\mathbf{r}) r_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \frac{e^2}{2} \iint \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (2.2.15)$$

上式的第二项便是库仑交换项。

$$\text{令 } y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad x = k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad k_F^3 = 3p^2 r_z(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$$

则库仑交换项的积分写为

$$\iint \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \frac{2}{p^3} \int k_F^4 \int_0^\infty xy^2 dx d\mathbf{R} = \frac{1}{2p^3} \int k_F^4 d\mathbf{R}, \quad (2.2.16)$$

所以库仑能最终表示为

$$E_{coul} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{r_z(\mathbf{r}) r_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - e^2 \frac{3}{4} \left(\frac{3}{p} \right)^{1/3} \int r_z^{4/3} d\mathbf{R}. \quad (2.2.17)$$

上式便是包括交换项的库仑能公式，库仑交换项对于小核的影响较大，对于中重核（如 $A > 40$ ），交换项对于库仑能的贡献小于10% [10]，不过它对核内质子的分布会有一定地影响，从而会影响核的稳定性以及反应过程。

费米气体模型是一个很简单的模型，它体现了核力的饱和性（原子核中心区域的密度都基本均匀不变），实际上是一种高度兼并的费米流体。它能清楚地解释原子核的一些基本性质，所以也经常被其它模型所引用，如前面提到的 QMD 模型在初始抽样核子的动量时就引用了费米气体模型，Skyrme-HF 模型中库仑交换项也采用上面得到的交换项形式。

第三章 经典散射描述

§3.1 核子核子碰撞

量子分子动力学模型相对于平均场模型之所以能够更好地描述重离子碰撞中的涨落，很重要一个因素就是它考虑了碰撞项。随着反应入射能量的增加，强子间的碰撞几率也相应增加，碰撞项的作用也越来越重要。QMD 模型中对核子核子碰撞的处理思想类似于级联模型或者 BUU/VUU 模型。级联模型是完全微观地处理核子核子碰撞。它将核子看成点粒子，其数值模拟程序的主要任务就是决定粒子何时发生碰撞以及碰撞到什么地方。

QMD 模型中核子碰撞部分的程序为[78]:

两核质心系变换到两体质心系 \Rightarrow 运动学的几何条件判断 \Rightarrow 反应截面判断 \Rightarrow 坐标系变换回原来的两核质心系 \Rightarrow 泡利阻塞判断。对于某一个反应事

件，质心系的能量为 $\sqrt{s} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}$ ，碰撞粒

子的质心速度为 $\mathbf{b} = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/(E_1 + E_2)$ 。在两体质心系下第

一个粒子的动量为 $\mathbf{p} = g \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{b}}{b} - b E_1 \right) \frac{\mathbf{b}}{b} + \left(\mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{b}}{b} \frac{\mathbf{b}}{b} \right)$,

第二个粒子的动量为 $-\mathbf{p}$ 。两体质心系下两核子间的距离为

$$\Delta r = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (g - 1) \left(\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{b}}{b} \right) \frac{\mathbf{b}}{b}。$$

可能发生碰撞的运动学几何条件包括:

(1) 在 $-dt/2$ 到 $dt/2$ 的时间间隔内，两个粒子经过了最短距离，

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{p} \right| \leq \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + m_1^2}} + \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_2^2}} \right) \frac{dt}{2};$$

(2) 碰撞参数 $b = \sqrt{(\Delta \mathbf{r})^2 - ((\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})/p)^2}$ 小于核子核子碰撞总截面对应的最大碰撞参数 $b_{\max} = \sqrt{s_{\text{tot}}/p} \approx 1.32 \text{ fm}$ ，即 $b \leq b_{\max}$ 。

如果发生碰撞的运动学几何条件满足，下面便进一步进行反应截面判断。对于一个碰

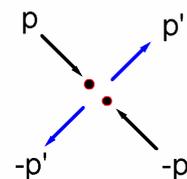


图 2.3 两体质心系下核子核子碰撞示意图

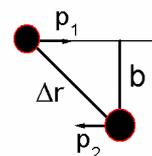


图 2.4 碰撞发生的几何条件

撞，它可能是弹性碰撞或者非弹性碰撞。如果入射能量低于 150MeV/u，弹性道占主要并且为了简单我们只考虑非相对论动力学。在非弹性散射中， π 道是比较重要的，它通常被包含在核子的 Δ 态中。我们主要考虑下面的一些反应道：

- $n + n \rightarrow n + n$ (a)
- $n + n \rightarrow n + \Delta$ (b)
- $n + \Delta \rightarrow n + n$ (c)
- $n + \Delta \rightarrow n + \Delta$ (d)
- $\Delta + \Delta \rightarrow \Delta + \Delta$ (e)

对于反应道(a)和(b)，截面参数来自于实验结果；反应道(c)的截面是通过细致平衡原理获得；反应道(d)以及(e)与反应道(a)相同。碰撞的反应道是弹性的还是非弹性的由 Monte-Carlo 抽样决定。碰撞的反应道决定后，再由 Monte-Carlo 决定散射角度。

下面简单给出碰撞中反应道判断的流程图，

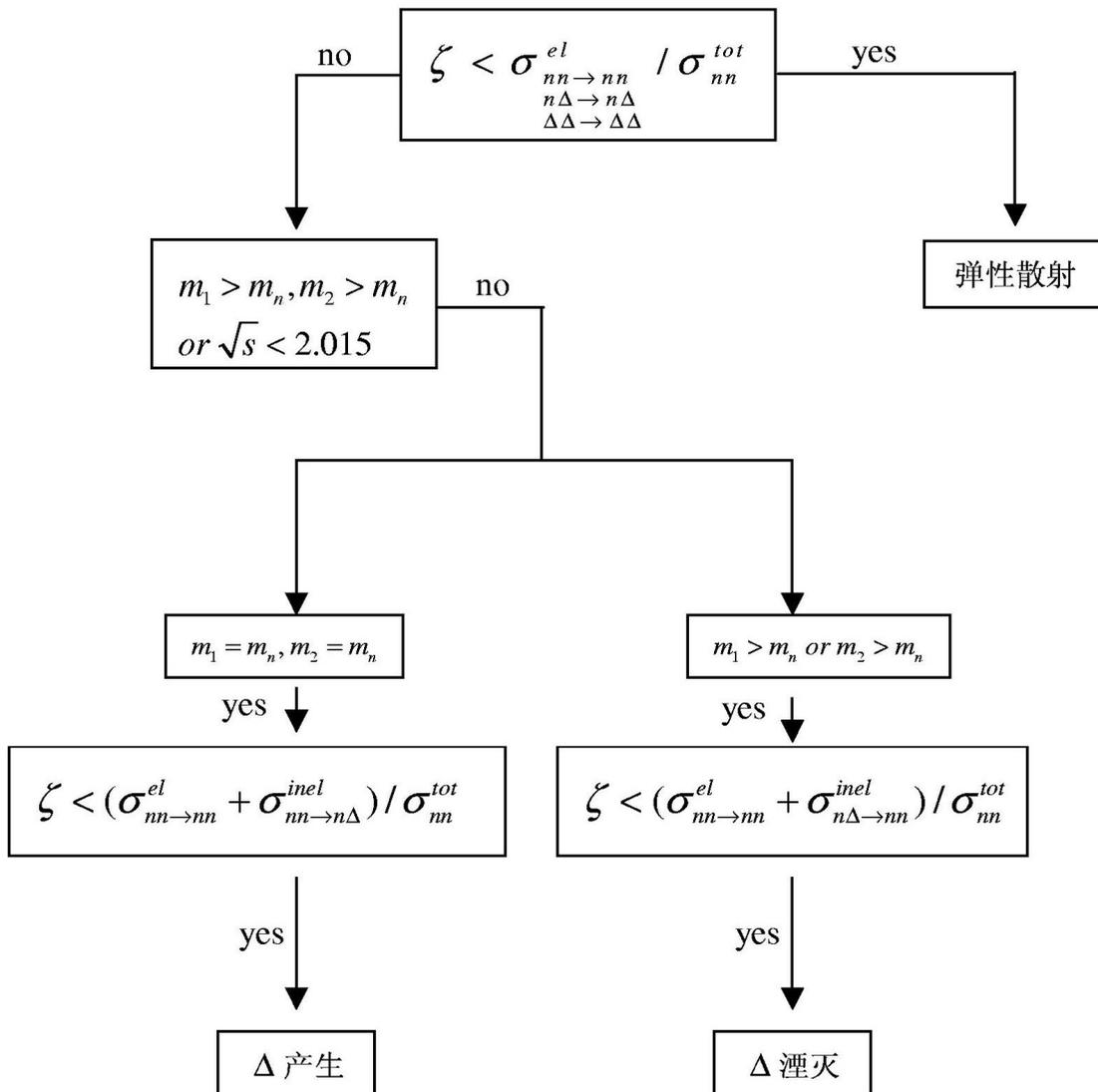


图 2.5 QMD 模型中核子核子散射类型判断流程图

碰撞的反应道决定后，再由 Monte-Carlo 决定散射角度。下面给出 Cugnon 参数化的各种反应道截面，以及相应的散射角度[78]。

a) 核子-核子弹性散射

散射截面为

$$s_m^{el}(\sqrt{s}) = \begin{cases} s_m^{tot} \approx 55mb & \text{if } \sqrt{s} < 1.8993 \\ \frac{35}{1+100(\sqrt{s}-1.8993)} + 20mb & \text{else} \end{cases} \quad (2.3.21)$$

弹性散射道的双微分截面为

$$\frac{dS}{dt} = e^{bt}, \quad (2.3.22)$$

其中， $t = -2p^2(1 - \cos q)$ ，当 $q_s = p/2$ 时 $t_0 = -2p^2$ 。

b 以参数化的形式给出：

$$b(\sqrt{s}) = \frac{6(3.65(\sqrt{s}-1.866))^6}{1+(3.65(\sqrt{s}-1.866))^6} \quad (2.3.23)$$

t_1 通过随机数 z_1 抽取：

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1} dS/dt}{\int_{t_0}^0 dS/dt} = z_1, \quad \text{则 } t_1 = \ln(e^{bt_0}(1-z_1)+z_1)/b。$$

碰撞后粒子的 q 角度为

$$\cos q = 1 - t_1/t_0, \quad (2.3.24)$$

f 角度认为是各向同性，由随机数 z_2 抽取。

$$f_s = 2pz_2 \quad (2.3.25)$$

因为是弹性散射所以碰撞后动量大小不变，

$$p' = p. \quad (2.3.26)$$

b) 核子-核子非弹性散射 (Δ 产生)

散射截面为

$$S_{m \rightarrow n\Delta}^{inel}(\sqrt{s}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sqrt{s} < 2.015 \\ \frac{20(\sqrt{s} - 2.015)^2}{0.015 + (\sqrt{s} - 2.015)} mb & \text{else} \end{cases} \quad (2.3.27)$$

出射角度假设为各向同性，

$$\cos q_s = 1 - 2z_3, \quad f_s = 2pz_4. \quad (2.3.28)$$

出射动量的大小为

$$p' = \sqrt{(s - m_n^2 - m_\Delta^2)^2 - 4m_n^2 m_\Delta^2} / (2\sqrt{s}), \quad (2.3.29)$$

其中 m_n, m_Δ 分别为核子与 Δ 子的质量， Δ 子的质量取为，

$$m_\Delta = \begin{cases} \frac{3}{4}(\sqrt{s} - 2.015) + 1.077 & \text{if } m_\Delta < 1.231 \\ 1.231 & \text{else} \end{cases}. \quad (2.3.30)$$

c) 由细致平衡原理得到的 Δ 湮灭过程

散射截面

$$S_{n\Delta \rightarrow mn}^{inel}(\sqrt{s}) = \frac{1}{8} \left(\frac{p'}{p} \right)^2 S_{nm \rightarrow n\Delta}^{inel} \quad (2.3.31)$$

出射角度也假设为各向同性， $\cos q_s = 1 - 2z_3$ ， $f_s = 2pz_4$ 。

出射动量的大小为 $p' = \sqrt{s/4 - m_n^2}$ 。

确定了出射动量的大小和角度后，通过尤拉变化[13]便可以得到动量的各个分量：

$$\begin{aligned} p'_x &= p' [\cos f_0 (\cos q_0 \sin q_s \cos f_s + \cos q_s \sin q_0) - \sin f_0 \sin q_s \sin f_s] \\ p'_y &= p' [\sin f_0 (\cos q_0 \sin q_s \cos f_s + \cos q_s \sin q_0) + \cos f_0 \sin q_s \sin f_s] \\ p'_z &= p' (\cos q_0 \cos q_s - \sin q_0 \sin q_s \cos f_s) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

其中 q_0, f_0 为初始角度： $\cos q_0 = p_z / p$ ， $\tan f_0 = p_y / p_x$ ， p_x, p_y, p_z 为初始动量的三个分量。

计算出各种反应道的散射动量后，再将两体质心系变回到两核质心系，随后再进行泡利阻塞判断，计算碰撞后粒子的相空间密度，如果相空间密度不满足（详细的计算在下一节讨论），说明本次碰撞无效，从而取消这次碰撞，粒子的动量变回碰撞前的值。

§3.2 散射截面[47]

在重离子核反应中，当两核进入核力作用范围时，其运动轨迹将受到库仑力和核表面间作用力的影响。这种作用，对所用核反应都有影响。弹性散射是研究这种离子-离子相互作用的重要实验手段。重离子一般比轻离子要重十倍到一百倍，其波长相当于轻离子的三分之一到十几分之一。因此经典的轨道描述往往对于理解重离子核反应机制有帮助。弹性散射的研究可以帮助人们分清哪些静电轨道的结论是可用的，哪些方面需要进行量子力学的修正。

弹性散射主要依赖于库仑相互作用，相对于其他重离子核反应要简单一些，而弹性散射的一些理论很容易推广应用于其他重离子碰撞（如准弹性散射以及深度非弹性散射），而且重离子核反应截面测量通常都要用到卢瑟福散射截面作归一，所以我们首先介绍弹性散射理论的基本概念和结果。

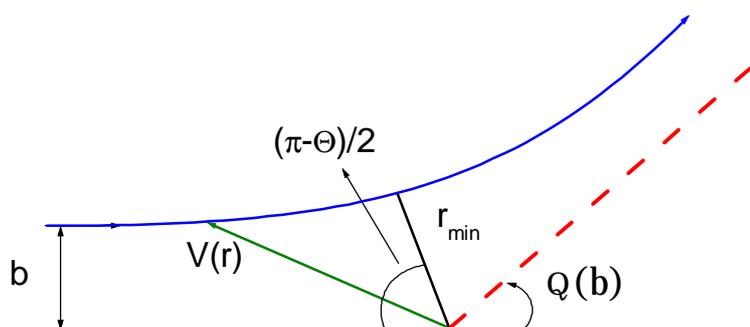


图 3.5 在有限力程的中心场中粒子的轨道。

因为在非相对论极限下，考虑一个质量为 m 的粒子被球对称势 $V(R)$ 所散射。引入球坐标 r, φ, θ 来描述粒子轨道，根据能量 E 和角动量 L 守恒，可以得到：

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \quad (3.3.1)$$

$$L = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3.3.2)$$

从上面两个方程消去 dt ，则有，

$$d\varphi = -\frac{L}{mr^2} \left\{ \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right\}^{-1/2} dr. \quad (3.3.3)$$

这也就是图 3.5 所示的左面一半轨道的微分方程。对 r 从 ∞ 到最小距离 r_{\min} 积分，可以得到偏转角

$$\Theta = p - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L}{mr^2} \sqrt{\frac{m/2}{E - V(r) - L^2/(2mr^2)}} dr。 \quad (3.3.4)$$

用碰撞参数 $b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$ 对 $\frac{b}{r} = y$ 作代换，则有

$$\Theta = p - 2 \int_0^{r_{\min}} \frac{dy}{\sqrt{1 - V(y)/E - y^2}}。 \quad (3.3.5)$$

散射角 q （它的范围从 $0 \sim p$ ）与偏转角 Θ （它的范围从 $-\infty \sim p$ ）的关系为 $\pm q = \Theta + 2np$ ， n 为整数。

对于库仑势

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{k}{r}, \quad (3.3.6)$$

由角动量和能量守恒可以知道在最小距离 r_{\min} 处，

$$mv_{\min} r_{\min} = L \quad (3.3.7)$$

$$E = \frac{1}{2} mv_{\min}^2 + \frac{k}{r_{\min}} = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} + \frac{k}{r_{\min}} \quad (3.3.8)$$

可以得到两个粒子碰撞的最小距离，

$$r_{\min} = \frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + (2Eb/k)^2} \right), \quad (3.3.9)$$

通过表达式(3.3.5)最后得到偏转角

$$\Theta = 2 \arctan \frac{k}{2Eb}。 \quad (3.3.10)$$

微分截面是由单位时间偏转到立体角 $d\Omega$ 内的粒子数除以入射通量 \mathbf{v} 所表示，

$$s(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \frac{ds}{d\Omega} \sin q dq d\mathbf{f} = \frac{\mathbf{v} b |db| d\mathbf{f}}{\mathbf{v}}。 \quad (3.3.11)$$

考虑到 \mathbf{f} 方向的各项同性，经典的微分截面写为

$$s_{cl}(q) = \frac{b}{\sin q} \left| \frac{db}{dq} \right|。 \quad (3.3.12)$$

将偏转函数（3.3.10）代如上式，就得到了著名的卢瑟福散射截面，

$$s_R(\mathbf{q}) = \frac{k^2}{4} \left(\frac{1}{\sin(\mathbf{q}/2)} \right)^4 = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16E^2} \left(\frac{1}{\sin(\mathbf{q}/2)} \right)^4. \quad (3.3.13)$$

这是重离子散射中一个非常重要的公式。

这里需要注意的是，上面的结果是针对质心系而言。而实验测量常常要用到实验室系，通过下面公式可以进行质心系中微分截面与实验室系中微分截面的相互转换，

$$s_R(\mathbf{q}_C) \sin q_C dq_C d\mathbf{f} = s_R(\mathbf{q}_L) \sin q_L dq_L d\mathbf{f} \quad (3.3.14)$$

$$\sin(\mathbf{q}_C - \mathbf{q}_L) = g \sin q_L \quad (3.3.15)$$

对弹性散射， $g = m_a/m_A$ 。

可以近似得到实验室系下的卢瑟福散射截面[48]，

$$s_R(\mathbf{q}_L) = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4E_L^2} \csc^4 q_L \frac{\left(\cos q_L + \sqrt{1 - (m_a/m_A \sin q_L)^2} \right)^2}{\sqrt{1 - (m_a/m_A \sin q_L)^2}}, \quad (3.3.16)$$

m_a, m_A 分别为入射粒子和靶的质量。

上面的表达式也可以表示为 g 的展开式[49]

$$s_R(\mathbf{q}_L) = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16E_L^2} \csc^4 \left(\frac{q_L}{2} \right) (1 + b_1 g^2 + b_2 g^4 + \mathbf{L}), \quad (3.3.17)$$

式中 $b_1, b_2 \mathbf{L}$ 只与 q_L 有关，已被列表给出[49]，对不同的体系，可以取不同的高阶项，

当 $g = m_a/m_A \rightarrow 0$ 时，也就变回为质心系下的卢瑟福散射公式 (3.3.13)。

§3.3 核核相互作用势的理论计算 [1]

严格的讲，用两核质心距离为变量的位能函数只使用于两核密度无重叠、或仅有少量重叠的情况，弹性散射也就发生在这一区域内，这种相互作用也只在这一区域内有物理意义。在量子力学的计算中，有时要用到两核质心距离很小时的复位势，那不过是用来模拟入射波在核表面的发射和折射情况。核-核相互作用势 $V(\mathbf{R})$ 包括人们比较熟悉的库仑相互作用势 $V_c(\mathbf{R})$ 以及人们不是非常熟悉的核相互作用势 $V_N(\mathbf{R})$ 。

库仑相互作用在低能重离子反应中可以起很大的作用，这是人们所熟知的。当两个核相互接近时，由于库仑场的作用，两核会发生电荷极化。如果不考虑这种极化效应，则在两核密度未发生重叠时 ($R > R_b$)，

$$V_c(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \quad (3.4.1)$$

当密度重叠很少时，仍可采用这个公式，对于密度重叠更大的情况，则要根据重叠的电荷分布计算库仑能。作为一种粗糙的估计，可设一个较小一点的核（半径为 R_b ）为点电荷，则当 $R < R_b$ 时，库仑相互作用写为，

$$V_c(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_b} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_b^2} \right) \quad (3.4.2)$$

这个公式比严格按照重叠密度计算的，误差不大于 25%。我们比较了用 imQMD3 模型严格按重叠密度方法（两核各自的密度冻结）以及用公式 (3.4.1) 和公式 (3.4.2) 计算的 $^{24}\text{Mg}+^{32}\text{S}$ 的库仑相互作用，如图 3.6 所示。图中圈线表示采用 imQMD3 模型严格按重叠密度方法计算的库仑作用；实线表示上面公式计算的库仑相互作用。从图上可以看出，在两核没有重叠时，两者的结果完全重合，而当两核的密度部分重叠时，两者稍微有些差别。而考虑这种密度重叠很大的位势，并不具有现实的物理意义，因此这点差别也不是很重要。

折叠势包括双折叠和单折叠两种方法来计算两个重离子之间的相互作用。单折叠法是用一个核的单粒子密度 r_1 同另一个核的单粒子势 V_2 进行折叠计算

$$V_N^{12}(R) = \int r_1(\mathbf{r}') V_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (3.4.3)$$

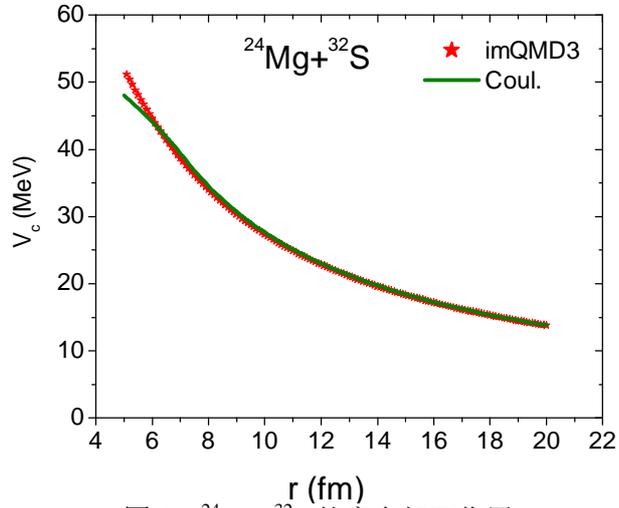


图 3.6 $^{24}\text{Mg}+^{32}\text{S}$ 的库仑相互作用

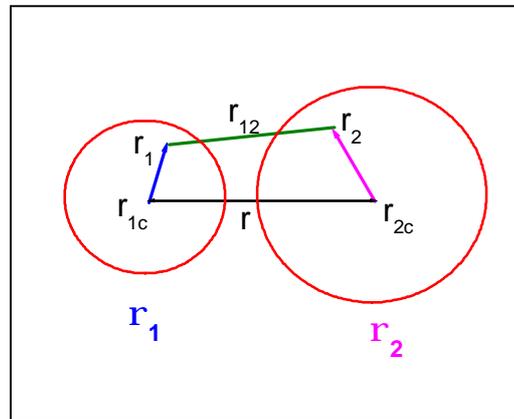


图 3.7 折叠势计算中的坐标矢量示意图

由于一般情况下计算出来的 $V_N^{12} \neq V_N^{21}$ ，所以通常取它们的平均值。双折叠法是用核子核子相互作用 $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 折叠到入射粒子和靶核的单粒子密度分布 r_1 、 r_2 中，如图 3.7 所示，从而产生一个对称的相互作用势

$$V_N^{12}(R) = V_N^{21}(R) = \iint r_1(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{1c}|) v(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) r_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{2c}|) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (3.4.4)$$

其中 $R = |\mathbf{r}_{1c} - \mathbf{r}_{2c}|$ 表示两核质心的距离，核子核子相互作用 $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 可以采用有效相互作用如 d 形势的 Skyrme 相互作用。另外需要注意的是，在折叠势的计算公式 (3.4.3) (3.4.4) 中我们忽略了两个核可能的内部激发以及波函数的反对称化所产生的影响。

§3.4 准弹性散射以及熔合的实验测量

核反应中的各种截面均与入射粒子的能量有关。反应截面随入射粒子能量的变化称为激发函数。激发函数的实验测量是核反应工作的一项主要任务，它对于原子核物理基础研究和实际应用方面都相当重要。为了测量一定能量下的散射以及熔合截面，我们必须对反应产物进行鉴别。我们可以通过测量这些产物在介质中的能量损失、停止时的能量沉淀，即所谓的残余能量以及它们在一段距离内的飞行时间进行质量和电荷鉴别[53][54]。大多数情况下，只要结合这些测量中的两者就可以对反应产物进行

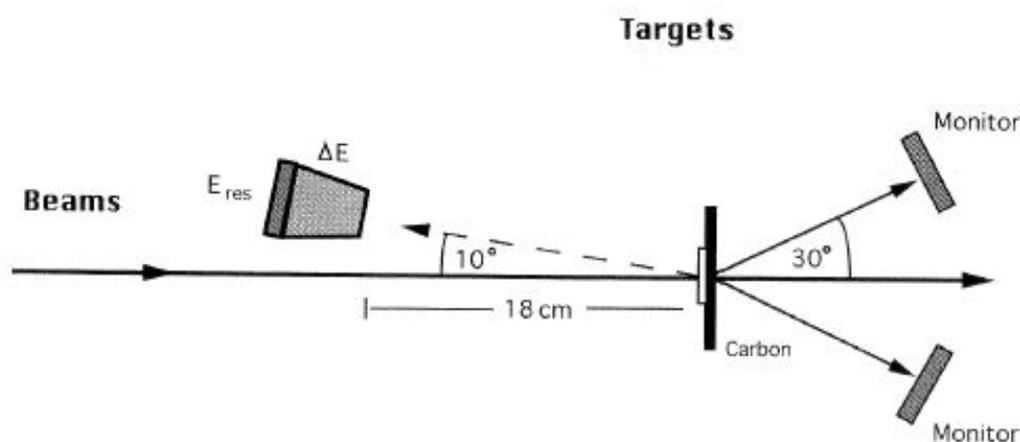


图 3.15 探测背角准弹性散射的实验装置。

鉴别。

准弹性散射激发函数的测量可以通过两种方法[56]，一种是在背角测量类弹的散射粒子，另一种是在前角测量反冲的类靶核。下面简单介绍一下背角准弹性散射的实

验测量。图 3.15 给出背角准弹性散射的实验装置图。束流通过加速器以一定的入射能量轰击靶核，在背角通过测量散射粒子的 $\Delta E \sim E_{res}$ 二维图进行反应产物鉴别，结合前角的两个（或者四个）监视器对卢瑟福散射的测量，就能够得到背角准弹性散射的反应截面，最后得到准弹性散射的激发函数。

§3.4.1 能量和时间的测量 [56]

当具有一定电荷态的离子（反应产物）通过气体探测器时，它会使得气体分子电离，而在气体探测器中，这种由于电离而累计的电荷与离子的能量损失呈现一定的比例，

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{mZ_{eff}^2}{E} \quad (3.5.1)$$

其中 dE 表示离子在一个微小的距离 dx 内的能量损失， Z_{eff} 是离子的有效电荷态，对于轻离子 $Z_{eff} = Z$ 。这样在距离 Δx 范围内总的能量损失为 $\Delta E \equiv \frac{dE}{dx} \Delta x$ ，随后紧接着测量残余能量 E_{res} ，则粒子的能量为损失能量 ΔE 和残余能量 E_{res} 之和。这种方法可以用来鉴别背角准弹性散射的粒子。

图 3.16 给出 $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ 的背角准弹性散射实验测量中散射粒子的 $\Delta E \sim E_{res}$ 的二维图，从中可以看出不同电荷的散射粒子被清楚地分离开来。

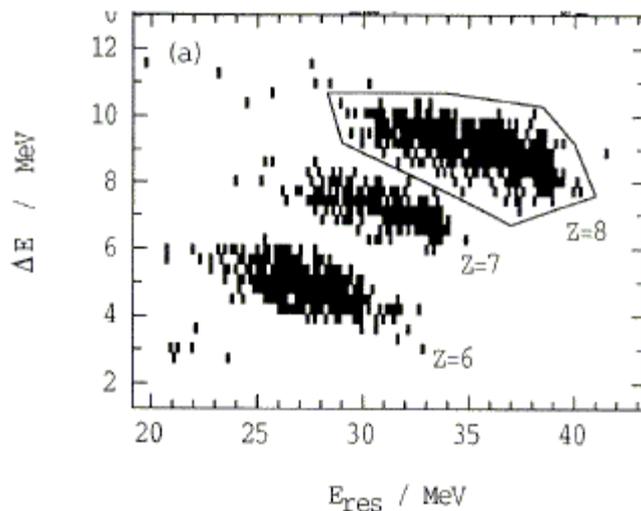


图 3.16 $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ 的背角准弹性散射实验测量中散射粒子的 $\Delta E \sim E_{res}$ 的二维图。

另一种鉴别粒子的方法就是测量粒子在一定距离内的飞行时间（TOF），然后结合能量损失 ΔE ，在 $\text{TOF} \sim \Delta E$ 二维图中鉴别粒子。我们知道某一种反应产物动能可以表示为

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.5.2)$$

结合公式 (3.5.1), 我们有

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{Z_{eff}^2}{v^2} = \frac{Z_{eff}^2 t^2}{d^2} \quad (3.5.3)$$

其中 t 表示在固定距离 d 内的飞行时间。这种方法可以用来鉴别熔合裂变反应中的裂变碎片。如果结合反应产物的动能

以及飞行时间 $E = \frac{m}{2} \frac{t^2}{d^2}$, 则

可以鉴别粒子的质量, 这种方法可以用来测量熔合反应中的蒸发残余核的质量以及背角准弹性散射中反冲的类靶核的质量。图 3.17 就是通过

$TOF \sim E_{res}$ 二维图对 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$

熔合反应中蒸发残余核与类束流粒子的分离鉴别[56]。从中可以看出, 测量反应产物的飞行时间以及它们的动能, 可以非常清楚地将它们鉴别出来。

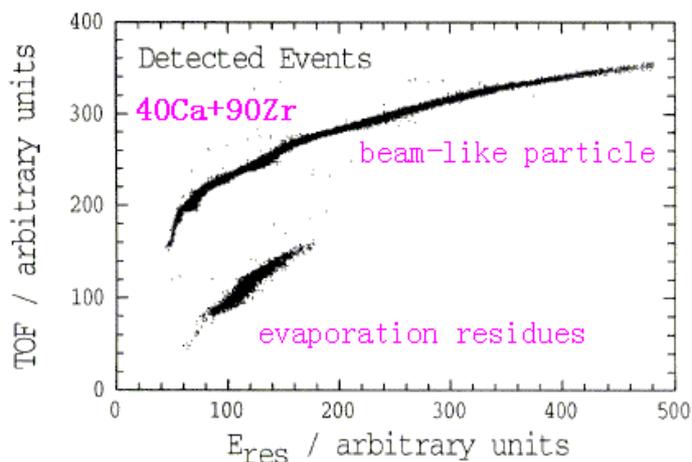


图 3.17 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 熔合反应中蒸发残余核与类束流粒子的分离鉴别用到的 $TOF \sim E_{res}$ 二维图。

§3.4.2 入射束流的监视以及重离子反应截面的归一

实验中可以对发生卢瑟福散射的粒子进行监测 (monitor), 如图 3.15 所示。在实际测量中, 束流方向不总是非常精确地沿 $q = 0$ 这个轴, 为了校正束流方向上的偏差, 通常在束流的上下两侧或者上下左右四侧进行监测。监测的另一个更重要目的就是通过前面讲到的理论上可计算的卢瑟福散射截面对入射束流进行监测。

反应截面定义为,

$$s = \frac{N}{I N_s} = \frac{\text{单位时间发生的反应数}}{\text{单位时间的入射粒子数} \times \text{单位面积的靶核数}},$$

它表示一个入射粒子同单位面积靶上一个靶核发生反应的概率。反应截面的单位具有

面积的量纲。通常用“靶 (b)”、“毫靶 (mb)”来表示, $1 \text{ b}=10^{-24} \text{ cm}^2$, $1 \text{ mb}=10^{-27} \text{ cm}^2$ 。

在核反应中, 还常常使用微分截面。它能更细致地反映核反应的特征, 而且它能够在实验中直接测量得到。核反应的出射粒子往往可以向各个方向发射。实验发现各方向的出射粒子数不一定相同, 这表明出射粒子飞向不同方向的核反应概率不一定相等。

设单位时间出射到 $q \rightarrow q + dq, f \rightarrow f + df$ 间的立体角 $d\Omega$ 内的粒子数为 dN , 则微分截面表达为,

$$s(q, f) = \frac{dN}{I N_s d\Omega} = \frac{\text{单位时间出射到}(q, f)\text{方向单位立体角内的粒子数}}{\text{单位时间的入射粒子数} \times \text{单位面积的靶核数}}。$$

微分截面是核反应中的一个重要物理量。它既可以由实验直接测量, 也可以由理论推导得出, 如前面讲到的卢瑟福散射截面, 便于理论和实验进行比较。要想从实验求得某种反应道的分截面 (如熔合或者准弹性散射), 往往需要通过微分截面的测量, 将测量结果对立体角积分而得到该反应道的分截面。

$$s = \int_0^{2p} \int_0^p s(q, f) \sin q dq df。 \quad (3.5.4)$$

对于一般的入射粒子和靶, 微分截面对 f 角是各向同性的, 因而微分截面 $s(q, f)$ 实际上只是 q 的函数,

$$s = 2p \int_0^p s(q) \sin q dq。 \quad (3.5.5)$$

微分截面 $s(q)$ 随 q 的变化曲线称为角分布。由于微分截面表达式中的 $dN, I, N_s, d\Omega$ 在实验中均可直接测量, 所以微分截面 $s(q)$ 可由实验直接测定。

实验上通过对微分截面 $s(q) = \frac{dN}{I N_s d\Omega}$ 表达式中的 $dN, I, N_s, d\Omega$ 测量, 可直接得到

重离子反应的微分截面。然而束流强度 I 和单位面积靶核数 N_s 的测量往往会给实验结果带来较大的误差。另一方面我们知道实验上的卢瑟福散射截面为

$$s_R(q) = \frac{dN_R}{I N_s d\Omega_R}, \text{ 而卢瑟福散射截面可以通过理论计算得到,}$$

$$s_R(q) = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16E^2} \csc^4(q/2)。 \quad (3.5.6)$$

因此实验上可以结合卢瑟福散射的理论公式消掉束流强度 I 以及单位面积靶核数 N_s ,

$$\frac{s(q)}{s_R(q)} = \frac{dN}{dN_R} \frac{d\Omega_R}{d\Omega} \quad (3.5.7)$$

从而给出比较精确的实验结果, 这就称为截面的卢瑟福归一化。

通过对束流的卢瑟福散射进行监视, 实验上只需通过测量重离子反应中某种反应道的粒子计数 dN (如熔合反应中蒸发残余核或者准弹性散射中的背角出射粒子) 及相应的探测器的固体角 $d\Omega$ 、卢瑟福散射的计数 dN_R 及相应的探测器的固体角 $d\Omega_R$, 并且利用卢瑟福散射的微分截面的理论值 $s_R(q)$, 就可以得到重离子反应的某一确定反应道的微分截面, 然后对角分布进行积分, 最后就可以得到这一反应的截面。探测器的固体角一般可以事先或者反应后通过 α 源进行校验, 因此实验测量中比较重要的部分就是得到反应产物计数 dN , 这就与反应产物的分离鉴别密不可分。

§3.4.3 熔合截面的实验测量

熔合截面可以表示为 $s_{fus} = 2p \int_0^p s_{fus}(q) \sin(q) dq$, 其中微分截面 $s_{fus}(q)$ 参照前面讲到的准弹性散射截面的实验测量, 可以写为,

$$\frac{s_{fus}(q)}{s_R(q)} = \frac{dN}{dN'} \frac{d\Omega'}{d\Omega} \quad (3.5.8)$$

实验上通过测量蒸发残余核的计数 dN 及相应的探测器的固体角 $d\Omega$ 、卢瑟福散射的计数 dN' 及相应的探测器的固体角 $d\Omega'$, 并且利用卢瑟福散射的微分截面的理论值 $s_R(q)$, 就可以得到熔合反应的微分截面, 然后对角分布进行积分, 最后就可以得到熔合反应的激发函数。

下面以 $^{40}\text{Ca} + ^{90,96}\text{Zr}$ 熔合为例说明熔合截面的实验测量[64]。 $^{40}\text{Ca} + ^{90,96}\text{Zr}$ 熔合截面的测量是在意大利的 LNL 国家实验室的 XTU 串列加速器上实现的。靶厚 $50\text{mg}/\text{cm}^2$, 通过蒸发镀到厚度为 $15\text{mg}/\text{cm}^2$ 厚的碳箔上。靶采用同位素靶, ^{90}Zr 靶包含 99.3% 的 ^{90}Zr , 0.30% 的 ^{91}Zr , 0.17% 的 ^{92}Zr , 0.12% 的 ^{94}Zr , 0.04% 的 ^{96}Zr ; ^{96}Zr 靶包含 95.63% 的 ^{96}Zr , 1.54% 的 ^{90}Zr , 0.40% 的 ^{91}Zr , 0.73% 的 ^{92}Zr , 1.70% 的 ^{94}Zr 。

束流能量 E_{lab} 由一个 90 度的分析磁铁来定义，其不确定度约为 100KeV。为了将熔和截面测量得更好，对这两个系统，我们从垒上 160MeV 到垒下 125MeV 之间进行测量（能量较高部分，能量步长为 1MeV，能量较低部分，能量步长为 0.5MeV）。对每一能量，利用一个荧光石英将束流聚焦在靶平面的相同位置。

^{40}Ca 入射束为 10^+ 电荷态，流强为 50~100nA。束流强度由四个硅平面垒探测器

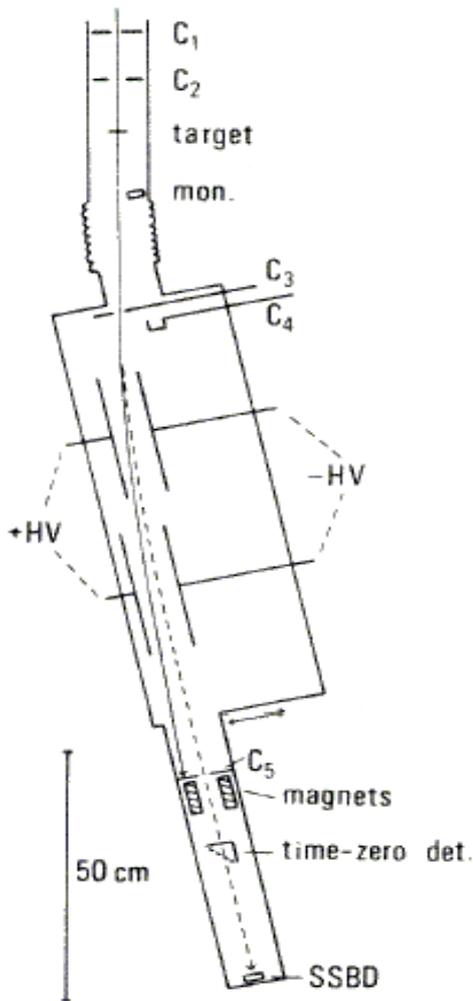


图 4.13 测量熔合激发函数的静电偏转仪。至上而下，束流通过准直器(C1,C2)聚焦轰击在靶上；透射流、蒸发残余核以及别的反应产物通过缝隙(C3)进入偏转仪；经过两个横向的电场的偏转后，大部分透射的类束流从蒸发残余核中分离出来并且在被阻挡在 C5 处；继续传输的蒸发残余核以及少数的类束流经过时间零点探测器到达硅表面垒探测器 (SSBD)。结合 SSBD 测量到的粒子残余能量 E_{res} 以及飞行时间

TOF 就可将蒸发残余核从剩余的类束流中分离出来。

不断监测着，由它们来探测来自靶的卢瑟福散射。这四个监视探测器装在垂直于束流方向的一个环上，它们所在处的散射角为 $q_{lab} = 22^\circ$ 。实验中，四个监视器计数率的改变是由于不同束流聚焦时其方向的细微改变，通过一个计算机优化算法来修正。

通过一个静电偏转仪（见图 4.13）将 $q_{lab} = 0^\circ$ 的蒸发残余核从强的类束流粒子中分离出来。在用硅表面垒探测器测量蒸发残余核的能量 E_{res} 之前，我们将蒸发残余核

以及一些残留的类束流粒子通过一个时间零点探测器。时间零点探测器与最后测量残余能量的硅表面垒探测器之间的距离为 40cm，用于测量粒子在这段距离的飞行时间 (TOF) 以及能量 E_{res} 。图 4.14 给出了粒子的残余能量 E_{res} 随飞行时间 TOF 的变化。其中下面的点线表示蒸发残余核，上面的点是类束流粒子。从图中可以看出通过粒子的飞行时间以及残余能量可以将蒸发残余核从一些残留的类束流粒子中很干净地分离出来。

在实验中我们对静电偏转仪的传输效率进行了测量。对 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 系统，入射能量为 $E_{lab} = 152\text{MeV}$ 时，在 $q_{lab} = 4^\circ$ 和 6° 的角度通过比较加上静电偏转仪和不加静电偏转仪两种情况下的计数率得到静电偏转仪的传输效率，为 0.7 ± 0.05 ，如同以前的实验，这个值取为常数。

在 $E_{lab} = 152\text{MeV}$ 和 140MeV 两个能量点，测量了蒸发残余核的角分布，如图 4.15(b) 所示。探测角度从 $q_{lab} = 0^\circ \sim -7^\circ$ ，间隔为 1° ，以及 $q_{lab} = +2^\circ$ 和 $+4^\circ$ 两个角度。两个体系两个能点得到的四个角分布基本上是 0° 对称。对同一个系统，在 $E_{lab} = 152\text{MeV}$ 和 140MeV 两个能量点的角分布在实验误差范围之内是符合的，因此对每个反应系统，我们将两个角分布结合起来。图 4.15(b) 分别给出了两个反应系统的结合的角分布。通过对角分布积分 (-7° 以外的蒸发残余产额通过外推得到)，我们可以得到两个系统在 $q_{lab} = 0^\circ$ 的总的蒸发残余产额。对于每个反应系统，在整个所测量的能量范围之内，认为这个比率独立于能量。静电偏转仪的固体角为 $0.636 \times 10^{-4} \text{sr}$ 。用来测量卢瑟福散射的四个监视探测器的固体角在实验后通过一个固定在靶位置的 α 源来测量，测量得到的四个固体角紧密分布在 $0.92 \times 10^{-4} \text{sr}$ ($d\Omega' = ds/r^2$) 附近。

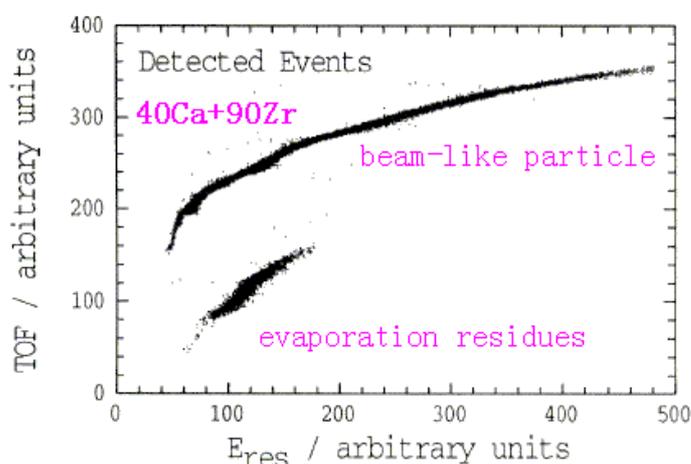


图 4.14 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 熔合反应中蒸发残余核与类束流粒子通过 $\text{TOF} \sim E_{res}$ 二维图清楚地分离开。

度。两个体系两个能点得到的四个角分布基本上是 0° 对称。对同一个系统，在 $E_{lab} = 152\text{MeV}$ 和 140MeV 两个能量点的角分布在实验误差范围之内是符合的，因此对每个反应系统，我们将两个角分布结合起来。图 4.15(b) 分别给出了两个反应系统的结合的角分布。通过对角分布积分 (-7° 以外的蒸发残余产额通过外推得到)，我们可以得到两个系统在 $q_{lab} = 0^\circ$ 的总的蒸发残余产额。对于每个反应系统，在整个所测量的能量范围之内，认为这个比率独立于能量。静电偏转仪的固体角为 $0.636 \times 10^{-4} \text{sr}$ 。用来测量卢瑟福散射的四个监视探测器的固体角在实验后通过一个固定在靶位置的 α 源来测量，测量得到的四个固体角紧密分布在 $0.92 \times 10^{-4} \text{sr}$ ($d\Omega' = ds/r^2$) 附近。

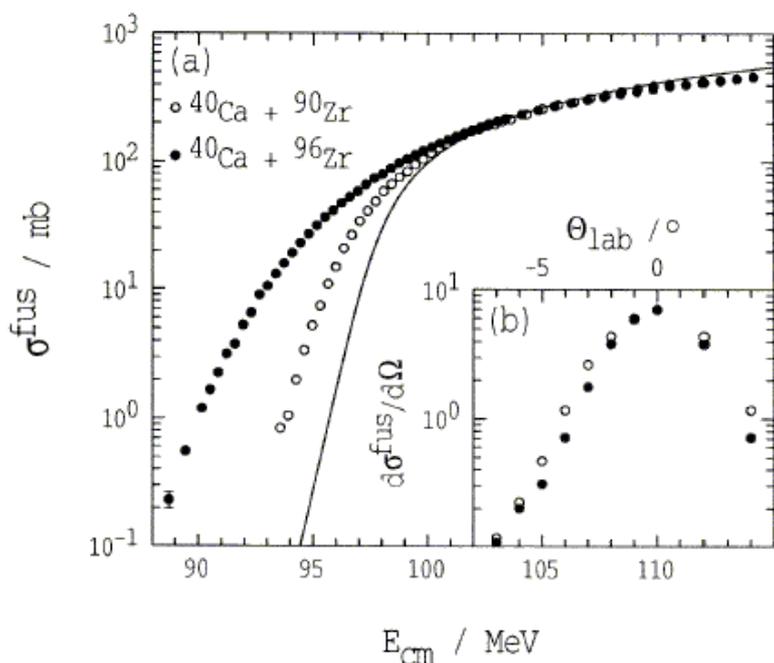


图 4.15 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 的熔合激发函数以及角分布。(a) 实验测量的得到的 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 的熔合激发函数，这里对两者的截面进行了归一化，实线表示一维位垒贯穿计算结果。(b) 测量 $q_{lab} = 0^\circ \sim -7^\circ$ 以及 $q_{lab} = +2^\circ$ 和 $+4^\circ$ 共七个角度得到的熔合角分布。图中的角分布结合了 $E_{lab} = 152\text{MeV}$ 和 140MeV 的测量结果。

对于每一个能量点，蒸发残余核的事件数要由监视探测器得到的卢瑟福散射进行归一。运用固体角，测量 0° 对全角度的比率以及传输因子，将这些蒸发残余产额变换成总截面。由于这两个系统的复合核裂变可以忽略，测量得到的截面就认为是熔合截面 σ_{fus} 。另外对能量在靶箔的损失要进行一些修正，就可以得到熔合反应的激发函数，如图 4.15 (a) 所示。其中截面的统计误差在 1% 的量级。激发函数的系统误差大约在 7%，这主要在于静电偏转仪的传输效率。

-完-

王宁
2003-6-10