

中图分类号: TP391.4

论文编号: 10006BY1819130

北京航空航天大学 博士学位论文

重离子熔合势垒的微观 动力学研究

作者姓名 姚 红

学科专业 物理学

指导教师 孟 杰 教 授

王 宁 教 授

宋春艳 副教授

培养院系 物理学院

[– This page is a preset empty page –]

Heavy-ion Fusion Barriers Based on Microscopic time dependent Hartree-Fock theory

A Dissertation Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy

Candidate : Hong Yao

Supervisors: Prof. Jie Meng

Prof. Ning Wang

Prof. Chunyan Song

School of Physics

Beihang University, Beijing, China

[– This page is a preset empty page –]

中图分类号：TP391.4

论文编号：10006BY1819130

博 士 学 位 论 文

重离子熔合势垒的微观 动力学研究

作者姓名 姚 红

申请学位级别 理学博士

指导教师姓名 孟 杰

职 称 教 授

学科专业 物理学

研究方向 粒子物理与原子核物理

学习时间自 2018 年 09 月 01 日 起至 2024 年 07 月 01 日止

论文提交日期 2024 年 05 月 07 日 论文答辩日期 2024 年 06 月 07 日

学位授予单位 北京航空航天大学 学位授予日期 年 月 日

[– This page is a preset empty page –]

关于学位论文的独创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在指导教师指导下独立进行研究工作所取得的成果，论文中有关资料和数据是实事求是的。尽我所知，除文中已经加以标注和致谢外，本论文不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含本人或他人为获得北京航空航天大学或其它教育机构的学位或学历证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对研究所做的任何贡献均已在论文中作出了明确的说明。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文作者签名：_____ 日期：_____ 年 _____ 月 _____ 日

学位论文使用授权

本人完全同意北京航空航天大学有权使用本学位论文（包括但不限于其印刷版和电子版），使用方式包括但不限于：保留学位论文，按规定向国家有关部门（机构）送交学位论文，以学术交流为目的赠送和交换学位论文，允许学位论文被查阅、借阅和复印，将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文。

保密学位论文在解密后的使用授权同上。

学位论文作者签名：_____ 日期：_____ 年 _____ 月 _____ 日

指导教师签名：_____ 日期：_____ 年 _____ 月 _____ 日

[– This page is a preset empty page –]

摘 要

重离子熔合反应是目前合成超重核与丰质子重核素的首选方法之一，在核物理研究中受到广泛关注。熔合势垒是描述重离子熔合反应过程中入射粒子与靶核之间相互作用势能的重要物理量，它的大小和形状与产物的生成截面、出射粒子能谱以及产物分布等紧密相关。对重离子熔合势垒进行微观动力学研究，有助于揭示熔合反应过程中的微观机制和动力学行为，并为超重核的合成提供最佳弹靶组合及入射能量的理论指导。微观动力学模型能够模拟核反应过程中核子的动力学演化，近年来在重离子熔合反应的研究方面取得了显著的成功，已成为研究重离子熔合势垒的重要微观方法之一。

本论文主要基于微观动力学模型——时间依赖的 Hartree-Fock(TDHF) 理论系统研究重离子熔合反应的势垒信息以及反应机制。首先，我们利用 TDHF 模型系统计算了 144 个近球形核反应体系的俘获阈能，并与通过拟合熔合激发函数提取的熔合势垒高度进行了比较。研究发现，对于弹靶都是幻数核的熔合反应，TDHF 模型给出的俘获阈能与实验提取的最可几俘获势垒高度非常接近。对于近球形核引起的熔合反应，由于弹靶的第一激发态相对较低，需要考虑俘获位置的体系激发能 (大约 1 MeV)，才能与实验提取值更接近。对于 144 个反应体系，TDHF 模型给出的俘获势垒与实验提取值之间的均方根偏差仅为 1.43 MeV，明显小于其它六个唯象核势的计算结果。进一步地，基于 TDHF 模型计算的势垒参数作为微观输入，采用 Siwek-Wilczyński 熔合截面公式，成功再现了 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 和 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 这七个体系的熔合激发函数。同时发现，熔合体系的反应 Q 值会影响垒下截面，相对较大的反应 Q 值会导致俘获位置的体系激发能较高，从而导致弹靶的动力学形变与核子转移更容易，进而引起垒下截面的增强。

其次，为了精确地分析质量数-总动能 (M-TKE) 分布，我们提出了两个函数来区分俘获事件、准弹性 (QE) 散射及深度非弹散射 (DIC) 事件。我们发现，当基于 Skyrme 能量密度泛函结合密度冻结近似计算的俘获势阱深度减小时，俘获事件与 DIC 事件的比例明显减小。基于这一发现，实验能够通过测量的 M-TKE 分布提取出俘获势阱深度。进一步地，结合改进的量子分子动力学 (ImQMD) 模型模拟，我们发现，QE 散射事件的接触时间小于 200 fm/c，而类裂变事件的接触时间则大于 600 fm/c，俘获与接触截面的比例随着俘获势阱深度的增加而系统地增加。

最后，我们在 TDHF 模型的基础上，结合拓展的 Thomas-Fermi(ETF) 近似，发展了 ETF-TDHF 模型。研究表明，在弹靶深度接触之前，ETF-TDHF 模型计算的结果与密度约束的 TDHF 模型的结果高度一致，而在计算势垒高度时 ETF-TDHF 方法能够节省大量的计算耗时。我们还注意到熔合势垒具有强烈的能量相关性。基于 ETF-TDHF 模型计算出的熔合势垒，我们利用传输矩阵方法进一步计算了熔合激发函数及其势垒分布。在对 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中，我们研究发现入射道的形变取向对熔合势垒具有显著影响，这一影响会改变蒸发剩余截面，头对腰碰撞的计算结果与实验数据更接近。

关键字：重离子熔合反应，TDHF，熔合势垒，俘获势阱，熔合截面

Abstract

The heavy-ion fusion reaction at energies around the Coulomb barrier is an important way not only for the synthesis of superheavy nuclei (SHN) and extremely neutron deficient nuclei, but also for the study of the nuclear structures. As a crucial physical quantity describing the interaction potential between the incident particle and the target nucleus during heavy-ion fusion reactions, the fusion barrier is closely related to the production cross-sections, outgoing particle energy spectra, and product distributions. In this work, we would like to investigate the potential barriers and the reaction mechanism for heavy-ion fusion reactions by using the microscopic time-dependent Hartree-Fock (TDHF) theory.

Firstly, we investigate the capture thresholds E_{cap} for 144 fusion systems with nearly spherical nuclei based on the time dependent Hartree-Fock (TDHF) theory. We find that for the reactions between doubly magic nuclei, the calculated E_{cap} are very close to the extracted barrier heights from measured fusion excitation functions. For the fusion reactions with nearly spherical nuclei, an excitation energy of about 1 MeV at the capture position need to be considered to better reproduce the data due to the lower excitation threshold. The rms deviation with respect to the barrier heights is only 1.43 MeV from the TDHF calculations, which is smaller than the results from six empirical nuclear potentials. Together with Siwek-Wilczynski formula in which the three parameters are determined by the TDHF calculations, the measured fusion cross sections at energies around the barriers can be well reproduced for seven fusion reactions $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$, $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$, $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$, $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$, and $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$.

Secondly, we propose two functions to distinguish fission-like events from quasi-elastic (QE) scattering and deep-inelastic collisions (DIC), for a better analysis of the measured mass-total kinetic energy distributions of binary fragments formed in fusion-fission reactions. We note that the ratio of capture to DIC events evidently decreases with the decreasing of the depth of the capture pocket predicted from the Skyrme energy density functional with which the capture pocket could be extracted from the measured mass-energy distributions. Together with the improved quantum molecular dynamics simulations, in which the typical contact time of the reaction partners is smaller than 200 fm/c for QE and is larger than 600 fm/c for fission-like

events, we find that the ratio of capture to touching cross section systematically increases with the pocket depth.

Finally, we propose an efficient microscopic dynamics approach (ETF-TDHF) to calculate the potential barrier by introducing an extended Thomas-Fermi (ETF) approximation together with the TDHF calculations. We find that the results from the ETF-TDHF approach are in good agreement with those from the DC-TDHF calculations at the regions before the neck is well formed. With the ETF-TDHF, the CPU hours can be significantly saved. With the potential barriers from the ETF-TDHF calculations combining the transfer matrix method for calculating the fusion probability, the fusion excitation functions are further investigated. For the fusion reaction of $^{40}\text{Ar} + ^{176}\text{Hf}$, we found that the orientation of the deformed nuclei at the incident channel significantly influences the fusion barrier height and consequently influences the evaporation residue cross-section.

Key words: Heavy-ion fusion reactions, TDHF, fusion barrier, capture pocket, fusion cross section

目 录

第一章 引言	1
1.1 重离子熔合反应	2
1.2 重离子熔合势垒	5
1.3 微观动力学模型	9
1.4 本文工作	10
第二章 理论模型	12
2.1 Skyrme 相互作用	13
2.2 Skyrme-Hartree-Fock 理论	14
2.3 时间相关的 Hartree-Fock 模型	19
2.4 改进的量子分子动力学模型	22
第三章 重离子熔合势垒的系统研究	26
3.1 重离子熔合势垒高度的 TDHF 理论计算	26
3.1.1 引言	26
3.1.2 数值细节	27
3.1.3 计算结果与讨论	30
3.1.4 小结	40
3.2 超重体系俘获势阱的系统研究	41
3.2.1 引言	41
3.2.2 数值细节	42
3.2.3 计算结果与讨论	42
3.2.4 小结	49
第四章 重离子核-核相互作用势的微观动力学研究	51
4.1 核-核相互作用势的微观动力学描述	51
4.1.1 引言	51
4.1.2 核-核相互作用势的理论描述	53
4.1.3 计算结果与讨论	61

4.1.4 小结	66
4.2 重离子熔合激发函数的理论研究	66
4.2.1 引言	66
4.2.2 传输矩阵方法	67
4.2.3 计算结果与讨论	68
4.2.4 小结	72
4.3 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中形变效应的研究	73
4.3.1 引言	73
4.3.2 对 DC-TDHF 方法的改进	74
4.3.3 计算结果与讨论	76
4.3.4 小结	80
第五章 总结及展望	81
5.1 总结	81
5.2 展望	82
参考文献	84
附 录	104
攻读博士学位期间取得的研究成果	110
致 谢	111
作者简介	113

图 清 单

图 1 核反应类型与轨道角动量的关系	3
图 2 新核素合成与发现方法汇总	4
图 3 $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 反应的核-核相互作用势	6
图 4 超重核 ^{296}Lv 的势能曲面和几条典型的演化途径	9
图 5 在 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应中体系在不同时刻的密度分布	29
图 6 俘获阈能随 ^{28}Si 入射角度和碰撞参数的变化	29
图 7 在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中体系密度分布随时间的演化	31
图 8 弹靶核质心距离随时间的变化及势垒分布与实验值的比较	33
图 9 利用 TDHF 模型计算 144 个近球形体系的俘获阈能与实验数据的相对偏差	33
图 10 利用 TDHF 模型和 Bass 势计算 144 个近球形体系的俘获势垒高度与实验数 据的绝对偏差	35
图 11 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 及 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 反应的熔合激发函数的理论计算值与 实验值的比较	38
图 12 同图 11, 但针对 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应。	39
图 13 同图 11, 但针对 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 反应。	40
图 14 $^{36}\text{S}+^{238}\text{U}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{144}\text{Sm}$ 反应产物的质量数-总动能分布实验值	44
图 15 同图 14, 但针对 $^{48}\text{Ca}+^{238}\text{U}$ 、 $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 、 $^{52}\text{Cr}+^{248}\text{Cm}$ 和 $^{64}\text{Cr}+^{248}\text{U}$ 反应	45
图 16 同图 14, 但针对 $^{58}\text{Fe}+^{208}\text{Pb}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ 反应	45
图 17 同图 14, 但针对 $^{48}\text{Ca}+^{244}\text{Pu}$ 、 $^{48}\text{Ti}+^{238}\text{U}$ 、 $^{52}\text{Cr}+^{232}\text{Th}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{198}\text{Pt}$ 反应	46
图 18 俘获势阱深度与有效裂变参数的关系	47
图 19 $^{64}\text{Ni}+^{208}\text{Pb}$ 在不同接触时间下的质量数-总动能分布	48
图 20 俘获截面 σ_{cap} 与接触截面 σ_{T} 的比值随俘获势阱深度的变化	49
图 21 ETF 方法的不同阶近似的计算值与 HF 计算值的比较	61
图 22 利用 ETF2 和 ETF4 计算原子核的基态能量值与实验值的相对偏差	62
图 23 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的核-核相互作用势	62
图 24 利用 ETF-FHF 和 DC-FHF 计算值 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的密度冻结势	63

图 25 利用 ETF-TDHF 和 DC-TDHF 计算 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的动力学势	64
图 26 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的势垒半径和势垒高度随入射能量的变化	65
图 27 粒子在穿透过程中发生穿透和反射的示意图	69
图 28 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的势垒穿透概率和熔合激发函数	69
图 29 熔合激发函数的理论计算值与实验值的比较	70
图 30 势垒分布的理论计算值与实验值的比较	72
图 31 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中进行密度约束计算前与计算后的密度分布	75
图 32 利用不同理论方法计算得到 $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ 反应的核-核相互作用势	76
图 33 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的核-核相互作用势及熔合激发函数的理论计算值与实验值的对比	76
图 34 ^{40}Ar 分别与不同靶核反应的蒸发剩余截面的理论计算值与实验值比较	77
图 35 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 在不同入射能量和不同形变取向下的核-核相互作用势	78
图 36 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应蒸发剩余截面的理论计算值与实验值的比较	79

表 清 单

表 1 利用 TDHF 模型和其他唯象势垒模型计算 144 个近球形体系的俘获势垒高度 值与实验值的均方根偏差	35
表 2 利用 TDHF 模型计算确定七个反应体系在 SW 公式中的势垒参数	37
表 3 ImQMD 模型参数 IQ3a	42
表 4 13 个反应体系的入射道属性	46
表 5 势垒高度实验值与理论计算值的比较	65

[– This page is a preset empty page –]

第一章 引言

原子核是由中子、质子组成的量子多体系统，它是物质结构的一个重要层次。原子核是原子中心的一个极其微小 ($\sim 10^{-15}$ m) 的实体，它几乎包含了原子的全部质量。人们根据中子数 N 和质子数 Z 来区分原子核，用 ${}_Z^AX_N$ 符号表示一个核素，其中 A 表示核子总数 (质量数, $A = N + Z$)， X 代表与质子数 Z 相对应的元素符号。具有相同质子数 Z 但中子数 N 不同的原子核称为同位素，具有相同中子数 N 但质子数 Z 不同的原子核称为同中子素，而具有相同质量数 A 但质子数 Z 不同的原子核称为同量异位素。

原子核物理的研究历史深远而丰富，其起源可以追溯到 1896 年，当时 H. Becquerel 首次发现了放射性现象[1]，这一发现被看成为核物理学发展的开端。1911 年，Rutherford 通过 α 粒子与原子散射的实验，揭示了原子内部存在一个密集的核心[2]，即我们所说的原子核。这一发现不仅解决了原子核与原子尺度的疑惑，也为后续的核结构研究提供了重要的线索。随后，在 1919 年，Rutherford 通过 α 粒子轰击氮核的实验，成功地发现了质子[3]，这一发现极大地推进了人们对原子核内部组成的了解。然而，此时物理学家对于原子核内部的具体结构仍然充满困惑。直到 1932 年，Chadwick 通过一系列实验证明了原子核中存在中子[4]，这一发现终于揭开了原子核内部组成的神秘面纱。1939 年，Hahn 和 Strassmann 两位科学家在研究中发现了原子核的裂变现象[5]，1942 年，费米建立第一个链式反应堆，标志着人类进入了掌握核能源的新时代。从此，原子核物理的研究进入了蓬勃发展的阶段，多位物理学家在这一领域做出了杰出的贡献，并因此获得了诺贝尔物理学奖。在理论研究方面，1935 年 Yukawa 提出了描述核力的介子交换理论[6]，这个理论不仅解释了强相互作用力的短程性，也为后续的研究提供了重要的理论基础。1949 年 M. G. Mayer 和 H. D. Jensen 提出了壳模型[7]，该模型考虑了核子自旋角动量与轨道角动量的耦合，成功解释了幻数现象，并描述了大部分基态原子核的自旋和宇称。壳模型的提出为原子核微观理论的发展奠定了坚实的基础。紧接着，在 1950 年，Rainwater 提出了原子核可能发生形变的观点[8]。随后，在 1952 年，A. Bohr 和 B. Mottelson 基于壳模型，进一步发展了集体模型来描述原子核的结构[9]，这一模型不仅考虑了单粒子运动，还考虑了集体运动（如转动和振动）等特性，更全面地反映了原子核的复杂性质。

原子核不仅汇聚了丰富的内禀自由度，还包含了四大基本相互作用，成为宇宙中绝大多数已知可释放能量的载体。历经百年，核物理一直是物质科学研究的前沿阵地，对人类生存与发展、国家安全与地位均产生了深远而重大的影响[10]。原子核是一个量子多体系统，有可能会发生振动、转动、熔合及裂变等集体过程。其中每一个过程都可以用来研究量子多体动力学的某一特定方面。例如，对核振动的研究可以告诉我们单粒子如何产生集体运动，它与壳结构的相互作用是什么，以及集体模式如何衰减和消失等。这些集体过程也可以通过重离子碰撞进行研究。在重离子碰撞中，由于碰撞时间尺度极短，系统与外部环境的相互作用非常有限，因此量子相干性得以保持，这使得重离子碰撞成为研究量子多体动力学的理想实验平台。此外，通过重离子核碰撞能够产生极高的温度和能量密度。在此条件下，核物质的性质和行为将发生显著变化。这些变化对于理解核物质的基本性质和探索新的物质状态具有重要意义。因此，重离子核反应一直是核物理领域的一个重要分支。由于重离子的波长通常较短且开放的反应道多，使其在参与核反应时展现出与轻粒子截然不同的行为。首先，由于重离子携带有大量电荷，它们之间的相互作用需克服较高的库仑势垒，这一势垒随着重离子电荷量的增加而显著升高。在入射能量低于库仑势垒的条件下，虽然直接的核相互作用被抑制，但强烈的库仑作用依然能引发核的形变、表面振动和集体转动等现象。其次，重离子参与的非对心碰撞过程尤为复杂。在这一过程中，入射的重离子会带入大量的轨道角动量，由于耗散作用，部分轨道角动量会转化为体系内部的自旋，为深入研究高自旋态核的结构与性质提供了独特的机会。再者，重离子种类的多样性使得重离子核反应的弹靶组合及反应类型异常丰富，并且与能量强烈相关，这为探索原子核的多样性和复杂性提供了广阔的舞台。重离子熔合反应作为重离子核反应的一种重要反应类型，它是目前合成超重新元素的唯一机制[11]。

1.1 重离子熔合反应

两个原子核之间可能发生的反应类型与体系的总质量、弹核的入射能量和经典碰撞参数或轨道角动量等入射道参数有关，这些因素可以归结到轨道角动量 $L = b\mu v$ 中， b 为碰撞参数， μ 为有效质量， v 为弹核运动的速度。角动量决定了反应过程中弹核和靶核物质分布相互渗透的程度。图1展示了重离子核反应可能发生的反应类型的分类示例。当角动量较大时，只有库仑相互作用，此时发生库仑散射或库仑激发。当角动量逐渐减

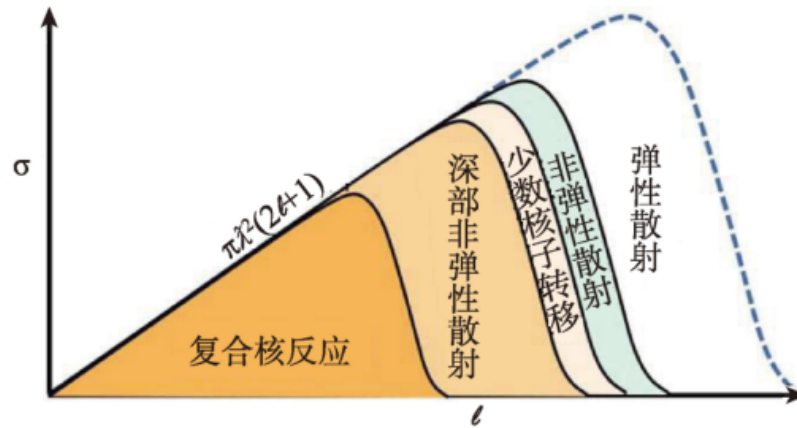


图 1 核反应类型与轨道角动量的关系[12]

小，核力开始起作用时，可以发生弹性散射或准弹性散射（非弹性散射和少数核子的转移反应）。当角动量继续减小时，两核的作用程度逐渐加深，原子核被高度激发，但两核保持各自的特性，相互接触一段时间（ ~ 2 zs）后分开，这种反应类型被称为深部非弹性散射（也称深度非弹性散射）。当角动量再减小时，两核可以融合为一体，接触时间足够长（ > 20 zs），原子核内各个自由度达到平衡，最终形成复合核，这种反应类型被称为熔合反应。

熔合反应是指两个原子核（弹核和靶核）克服熔合位垒被势阱俘获形成新“复合”原子核的过程。与化学反应中的化合物保留组成原子的基本特性不同，在熔合反应中，组成原子核的特性会消失。这一观点体现在 Bohr 独立性假说中[13]，它指出只有守恒量会被保留：质子和中子的总数（定义复合核的身份）、能量和角动量（定义形成复合核产生条件）和宇称。复合核通常具有较高的激发能，故用“熔合”一词而非“融合”。重离子熔合反应为我们提供了有关量子多体系统中的动态演化和耗散现象等重要信息。

自然界中存在 288 种核素，其中有 254 个稳定核素，34 个不稳定核素[15]。截止到 2022 年底，人类在实验室通过核反应合成了 3300 多种新核素，使核素数量增加了 10 倍以上。图 2 显示的是这些核素被首次发现时所使用的合成方法。可以看到，弹核碎裂/深部非弹反应、熔合/转移反应和裂变反应是合成新核素主要手段，其中，通过重离子熔合反应合成了 790 个新核素，约占合成新核素总数的 1/5，是所有合成方法中最多的。中国通过重离子熔合反应一共发现了 36 种新核素[14]。同时，从图 2 中可以发现，熔合反应产生的新核素绝大部分位于缺中子侧，这是由于在较重的弹靶核材料中，原子核的质子数与中子数比值较小的缘故。因此，形成的复合核处于缺中子那一侧。由于弹靶核材料的限制，目前实验上合成比铀重的超重核素只能通过重离子熔合反应实现。

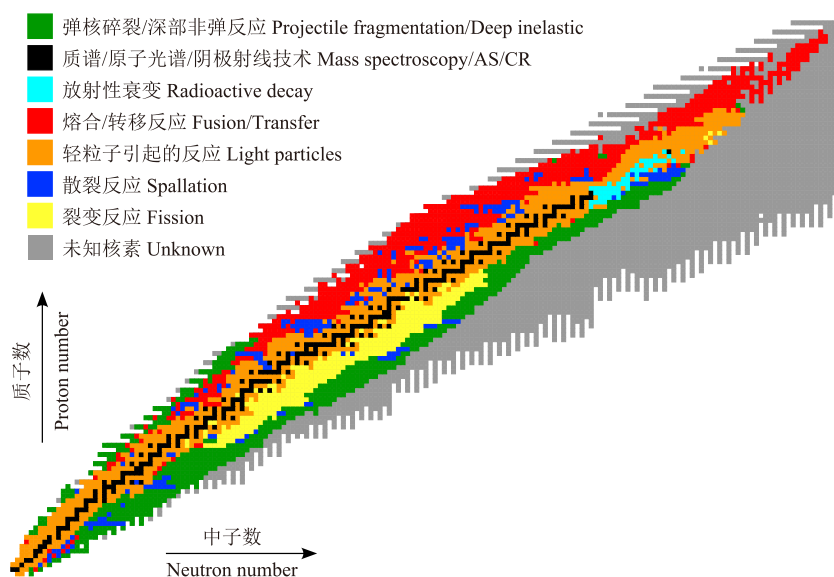


图2 新核素合成与发现方法汇总，灰色是理论预言可能存在、但是实验尚未发现的核素[14]。

最近几十年来，随着世界各大核物理实验室中重离子加速器的建成和放射性束流的投入使用，人们对新核素的合成，特别是超重核素的新核素合成，进行了大量的实验研究。例如，德国重离子研究中心 (GSI) 成功合成了 $Z=107$ 至 112 号新元素[16-21]，它们是通过 Pb 或 Bi 作为靶材料的“冷熔合”反应实现的；日本理化学研究所 (RIKEN) 通过 $^{70}\text{Zn}+^{209}\text{Bi}$ 的“冷熔合”反应成功合成了 $Z=113$ 号新元素[22]；俄罗斯杜布纳联合核子研究所 (Dubna) 采用 ^{48}Ca 束流和铜系靶的“热熔合”成功合成了 $Z=114$ 至 118 号新元素[23-26]。目前，元素周期表的第七周期已被全部填满，为了产生 $Z>118$ 号新核素，一些核物理实验室做了许多的尝试。例如，2009 年，Dubna 尝试利用 $^{54}\text{Fe}+^{244}\text{Pu}$ 的熔合反应来合成 $Z=120$ 号元素[27]，2016 年，GSI 尝试利用 $^{54}\text{Cr}+^{248}\text{Cm}$ 的熔合反应来合成 $Z=120$ 号元素[28]，他们都没有取得成功，仅给出了反应截面的上限。这是因为随着合成目标核素电荷数 Z 的增大，其蒸发剩余截面呈指数下降。例如， $Z=105$ 号元素的蒸发剩余截面约为 fb 量级，而 $Z=118$ 号元素快速下降至 pb 量级[26]，几乎到了探测器探测范围的极限。如果要继续采用重离子熔合反应来合成超重新元素，则需要提高实验束流的流强。当前，世界各大核物理实验室都在建造或升级强流重离子加速器。已经投入运行的第三代放射性核素装置包括美国的 FRIB[29-30]、俄罗斯的 JINR[31] 和日本的 RIKEN[32-33]，正在建造的有德国的 FAIR[34-35]、韩国的 ROAN[36]、中国的 HIAF[11] 等。其中，中国的 HIAF 已于 2018 年 12 月 23 日开工建设，建设周期约为 8 年。HIAF 装置上的超导直线加速器能够提供高强度、高单束团功率、宽能量范围、种类丰富的重离子束流和放射性束流，将成为国际上开展重离子熔合反应和多核子转移

反应实验研究的重要装置之一[11]。

重离子熔合反应的反应过程复杂而丰富，涉及势能、转动能、形变能和内部核子激发能等多种能量的转化，为我们提供了研究原子核结构和性质的重要线索。例如，原子核内部核子的运动自由度对势垒分布非常敏感。因此，可以通过对势垒分布的分析，研究振动、转动和形变等在熔合过程中的影响。大量研究发现，对于弹核和靶核都是球形核的熔合反应，势垒分布呈单高斯形状；而对于近球形核，声子振动则是主要的激发模式，相应的势垒分布为一系列声子振动的耦合形成的连续分布；对于大形变核，转动是最主要的激发模式，相应的势垒分布具有一定的倾向性[37]。目前，抽取势垒分布已成为分析近垒或垒下熔合反应的一种重要研究方法。势垒分布既可以从熔合激发函数中抽取，也可以从背角弹性或背角准弹性散射激发函数中抽取。通过对 $^{16}\text{O}+^{144,154}\text{Sm}$, ^{186}W , ^{92}Zr 和 $^{17}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ 等体系的研究表明，这两种方法抽取的势垒分布基本一致，但从准弹性散射激发函数中抽取的势垒分布误差相对较小[38]。同时，在核天体物理中，重离子熔合反应的研究对理解恒星内部的核反应过程以及宇宙中元素的起源和演化具有重要意义[39-40]。在恒星内部，由于高温高压环境，轻原子核会通过熔合反应形成更重的原子核。此外，Phuoc 等人的计算表明，采用不同的相互作用计算的熔合势垒高度出现显著的系统性偏差[41]。因此，可以通过熔合反应的实验数据约束核力及检验理论模型。

1.2 重离子熔合势垒

势垒隧穿是量子力学中的一种奇特现象，即粒子在能量低于势垒的势能时，会有一定概率穿过势垒。它反应了微观粒子的波粒二象性，为我们理解微观世界提供了新的视角，在生物学、化学、量子计算、凝聚态物理等领域有非常广泛的应用。原子核作为一个量子多体系统，在某些情况下也会发生势垒隧穿，如 α 衰变、核裂变、核熔合等。不同隧穿现象对应不同的势垒，如 α 衰变对应库仑势垒、核裂变对应裂变势垒、核熔合对应熔合势垒。对这些势垒的理论研究是当前核物理研究的热点课题之一。

在重离子熔合反应中，当弹核与靶核逐渐靠近并发生碰撞时，入射核的动能会转变为体系的势能、转动能、形变能以及内部核子的激发能等。当入射核的动能足以克服弹靶核之间的相互库仑排斥力，它们的核物质分布就会发生一定的重叠，如果重叠足够，核吸引力将克服库仑排斥力，原子核将被拉得越来越近，最终形成一个复合原子核。一个类比是，两个液滴在表面张力的驱动下，当它们接触时形成一个液滴。这个过程可

以用弹靶核间的势能来描述，该势能在核力和库仑力平衡的点上有一个峰值 (即势垒高度)。核-核相互作用势描述的是体系的势能随着两核距离的变化曲线，它反映了在反应过程中库仑力与核力的竞争，并直接影响核反应中所有动力学过程。当弹靶核逐渐趋近时，它们之间的核-核相互作用势呈现出一种独特的形状，类似于一道障碍或壁垒，这种形状导致了弹靶核在相互靠近时受到显著的“阻碍”效果。因此，通常人们将这一特定区域内的核-核相互作用势定义为“熔合势垒”。由于核力仅在两核距离较近时显著作用，熔合势垒有时会被不太精确地称为“库仑势垒”。

熔合势垒对于研究重离子熔合反应极其重要，在特定的入射能量下，熔合势垒高度以及熔合势垒的结构决定了反应发生的概率及反应路径。可以说，人们对熔合反应的理解是随着对熔合势垒认识的深入而逐渐加深的。图3显示的是 $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 反应体系的熔合势垒，它有三个比较重要的参数: 势垒高度 V_B 、势垒半径 R_B 及俘获势阱深度 B_{qf} 。当入射能量高于 V_B (通常称为“垒上”) 时，弹核可以直接与靶核接触并发生熔合。当入射能量低于 V_B (通常称为“垒下”) 时，虽然弹核的动能无法直接克服势能，但由于量子隧穿效应，弹核仍有一定几率与靶核发生熔合反应。

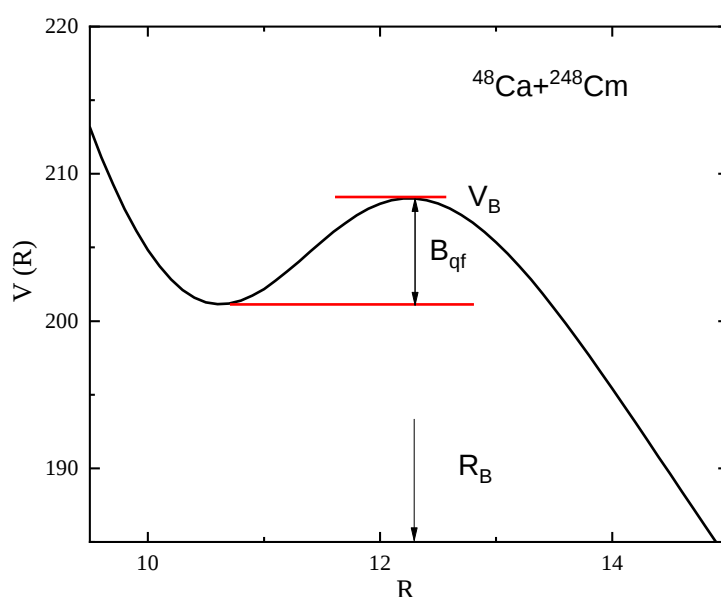


图3 $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 反应的核-核相互作用势

理论上，熔合势垒是客观存在的，但在实验上无法直接测量其确切值，然而可以通过实验测量的熔合激发函数间接获取熔合势垒的部分信息。在上世纪 60 年代以前，由于实验设备的限制，实验主要测量的是近垒或垒上的数据。基于这些数据，人们能够利用经典的垒上截面公式来抽取 V_B 和 R_B 的值。随着实验设备的不断升级，实验不仅能够测量比较深垒下的数据，还能达到更高的实验精度。基于深垒下的熔合数据探测熔合

势垒内部势的形状，是目前已知的唯一手段。1991 年，N.Rowley 等人[42] 从理论上指出，可以通过精确测量熔合激发函数 $\sigma(E)$ 来抽取势垒分布。此后，大量的高精度实验数据以及垒下数据被测量，这极大地推动了对熔合势垒及相关物理过程的研究。通过对 $\sigma(E)$ 对能量作二次微分 $d^2 E \sigma_{fus}(E)/dE^2$ 得到势垒分布[43]，进而可以根据势垒分布抽取 V_B 和 R_B 的值。此外，势垒分布还有助于对耦合道机制的理解[44]。

迄今为止，基于大量的实验数据，人们建立了许多理论模型来计算熔合势垒。常用的有 Bass 势[45]、亲近势[46] 及密度泛函势[47] 等。而“垒上”和“垒下”这两个概念，通常是以 Bass 势作为参考基准来定义的。基于上述的熔合势垒，通过一维势垒穿透模型可以计算熔合概率。通过与实验数据的比较，人们发现这些模型在垒上的计算结果基本一致，但在垒下部分普遍低于实验数据很多，甚至低好几个数量级，这被称为垒下熔合截面增强现象。1978 年，Stokstad 等人[48] 首先报道了 $^{16}\text{O}+^{148,150,152,154}\text{Sm}$ 反应体系的近垒及垒下熔合截面出现异常增强的现象。随后，多家实验组证实了近垒及垒下熔合截面增强是一个普遍现象[49-52]。针对这个现象，人们逐渐认识到一维的熔合势垒模型需要扩展到多维势垒模型。因此，在此基础上，耦合道模型得到了发展。当多个道耦合时，原先单个势垒会分裂成多个势垒，形成一个分布，即势垒分布。势垒分布概念的提出成功解释了近垒及垒下熔合截面增强的现象[53-55]，这使得耦合道模型的研究成为了当时的理论研究热点。

在熔合位垒附近的重离子熔合反应中，弹核和靶核相互作用时间与核集体运动及核内核子传输时间等相当。反应体系内部的动力学特性，特别是那些与核的激发状态(如转动、振动和巨共振等)以及核子间的转移密切相关的自由度，与相对运动自由度之间存在着显著的相互作用和耦合效应[44]。耦合效应直接影响了熔合反应道，故被称为耦合道效应。Hagino 等人于 1999 年开发了计算耦合道效应 CCFULL 程序，它包含所有级次的耦合效应[56]。该程序一经推出，就在熔合反应中得到了广泛运用[57-61]。由于 CCFULL 程序需要输入如形变参数 β_2 和 β_4 、转动态 2^+ 、 4^+ 和 6^+ 及振动模式等核结构参数，而通常这些核结构参数是未知的，因此在实际输入时，这些结构参数的取值会带有较大的任意性。尽管可以利用耦合道模型来解释实验数据，但由于核结构参数的不确定性，利用 CCFULL 程序进行理论预言时也会存在相当大的不确定性。此外，人们发现从熔合实验数据中抽取的势垒分布通常呈现出类高斯分布形状。因此，为了计算方便，人们常常将势垒分布近似为高斯分布[62] 或其多个叠加的形式[47,63-65]。这类方法被

称为经验耦合道模型。经验耦合道模型需要引入 $3N-1$ 个参数（其中 N 代表高斯分布的个数）。王宁等人的计算表明[65]，只要适当地选择高斯分布的数目，理论模型就能够很好地再现实验数据。

为了简化分析，上述模型都假设弹靶核在碰撞过程中的相互作用是瞬时的，以至于碰撞过程中弹靶核的密度分布不会发生显著变化，即突然近似。在熔合位垒附近的重离子熔合反应中，当弹靶核接近熔合势垒半径位置时，它们的运动速度变得非常缓慢，理论上可以给予它们足够的时间来调整密度分布。因此，在实际情况中，这个假设很难满足。此外，耦合道模型在计算中，需要引入额外参数，增加了理论预言的不确定性。为了更微观且自洽地描述熔合势垒，采用微观动力学模型进行研究是非常有必要的。由于微观动力学模型能够模拟核子真实的输运过程，它对于两核反应过程中引起的动态形变、颈部的形成、核子转移以及复合核的能量耗散等现象，能够给出合理且自洽的描述。在微观动力学模型的实际计算中，核结构与核反应使用的是同一套参数，这显著降低了理论计算的不确定性，从而为实验提供了更可靠的理论预测。

此外，在电荷乘积 $Z_1Z_2 < 1000$ 相对较轻的原子核的熔合反应中，熔合过程被认为是相当简单的，由于俘获势垒的“口袋”（也称为俘获势阱）较深，当弹核被俘获后即发生熔合。而在更大电荷乘积 $Z_1Z_2 > 1000$ 比较重的核反应中，相对运动角动量可以很容易地超过发生熔合反应的临界角动量，此时俘获势阱会消失，在这个反应过程中，反应机制极其复杂，存在熔合-裂变、深度非弹散射及准裂变三种反应机制的激烈竞争。图4给出的是超重核 ^{296}Lv 体系的势能曲面和几条典型的演化途径。可以看到， $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 体系在反应过程受到势能曲面的影响，出现如图所示的三种不同反应道 DIP、QF1 和 QF2，这些反应道与俘获势阱深度紧密相关。

在超重核反应中，对于非常高的角动量，只要有足够高的入射能量，即使不存在俘获势阱，两个核表面也可以被强制紧密接触。这将导致多个核子-核子之间相互作用，其结果是核子交换（但整体质量漂移很小）和能量耗散，这种反应机制被称为深度非弹反应，从 20 世纪 70 年代开始被广泛研究[66-69]。在同时期，人们发现了除熔合-裂变和深度非弹性反应之外的第三种反应机制——准裂变的迹象[70]，并在 80 年代明确了其特征[71-73]，其性质介于深度非弹性反应和熔合反应之间。准裂变反应出射的动能基本上完全被阻尼，就像在熔合之后的裂变一样[73-74]。此时，出射核的质量也演变为对能量有利的对称分裂，但这种分裂并不一定完全平衡，这与熔合-裂变的过程有所不同[72]，

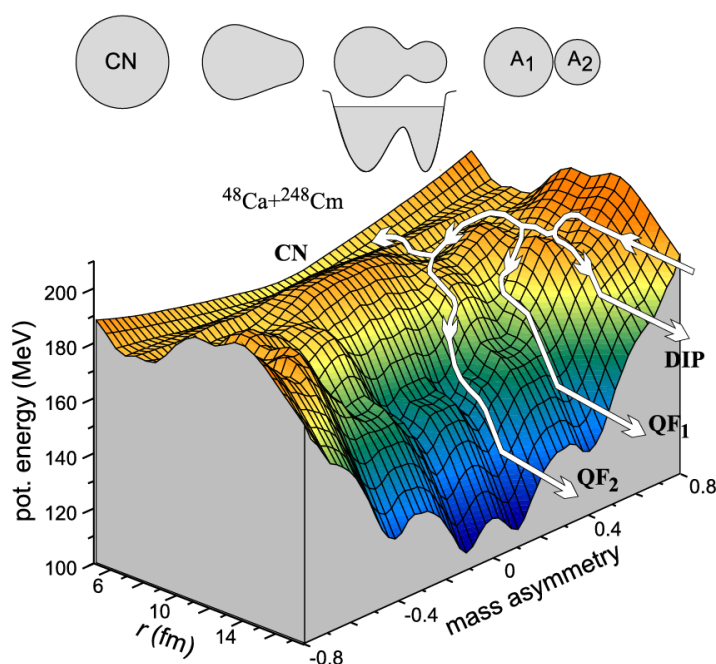


图 4 超重核 ^{296}Lv 的势能曲面和几条典型的演化途径[37]

角分布也与熔合-裂变的预期不一致。人们逐渐意识到对于超重核反应系统，通过势垒后可能发生准裂变反应而不是熔合反应，熔合势垒术语应改为更合适的名称，即俘获势垒。显然，俘获势垒在核反应中扮演着至关重要的角色，它与熔合-裂变、准裂变和深度非弹反应这三种反应机制紧密相关。因此，对于超重核反应体系的俘获势垒的微观动力学研究，对于理解产生这三种反应机制的微观动力学过程至关重要，特别是对于合成超重核来说，这样的研究尤为关键，可以为实验上合成新的超重核提供重要的理论支撑。

1.3 微观动力学模型

在库仑位垒附近的重离子熔合反应中，原子核的集体运动相比于内部核子的运动来说非常缓慢，核子-核子的相互碰撞也被 Pauli 不相容原理所限制，因此，核子的平均自由程很长，与核的大小相当，核子之间的运动可以被看成是相互独立的运动。在这种情况下，平均场近似是微观描述量子多体系统的一个非常好的近似。

在熔合反应过程中，原子核结构效应及其动力学效应会对反应产生强烈影响。一个经典的例子是反应过程中中子转移会导致熔合势垒高度降低，使得垒下熔合截面显著增强，这种现象无法用静态核势模型来处理。基于平均场近似的微观动力学模型，如时间依赖的 Hartree-Fock(TDHF) 模型和量子分子动力学 (QMD) 模型，计算得到的熔合势垒能自洽处理形变、核子转移和同位旋效应等以及它们之间的耦合效应。它们在描述熔

合反应机制上取得了极大的成功，例如势垒高度的能量依赖、同位旋效应、颈部的成长和形变效应等方面。其中，QMD 模型采用高斯波包来描述每个核子的单粒子分布函数，该模型既包含了平均场效应，又适当考虑了两体碰撞。然而，由于未能正确考虑自旋轨道相互作用，这些模型在描述垒下部分的熔合势垒时存在不足。该类模型包括 ImQMD 模型[75] 和 IQMD 模型[76]。TDHF 模型将体系的总波函数写成一个 Slater 行列式，并且自洽地包含了自旋轨道耦合相互作用。该类模型包括密度约束的 TDHF(DC-TDHF) 模型[77] 和耗散动力学的 TDHF(DD-TDHF) 模型[78]。相较于 QMD 模型，TDHF 模型计算非常耗时。上个世纪由于计算资源的匮乏，TDHF 模型的计算常采用一些近似，比如通过增加空间对称性[79]，减少 Skyrme 能量密度泛函的项数[80] 来减少计算量。近年来，随着计算设备的快速发展，TDHF 模型已经成功扩展至三维空间，并能够考虑更多的 Skyrme 能量密度泛函的项，在描述重离子熔合反应方面取得了很大的成功[81-84]。

要得到反应体系的熔合势垒，需要计算反应路径上的对应位置处的激发能。在 QMD 模型中，动能部分常采用拓展的 Thomas—Fermi 近似[85]，通过这种近似，动能部分被直接表示为密度的函数，从而使得激发能的计算变得非常简单。通过对大量体系的计算表明，这种近似是非常有效的，它对重离子熔合势垒的能量依赖性以及同位旋效应能够进行很好的描述[75,86-88]。在 TDHF 模型中，集体运动与单粒子运动相互耦合，直接提取激发能非常困难[89]。传统的做法是在反应路径上的对应位置处固定粒子数密度，并对波函数进行约束密度变分。通过这种方式可以得到固定粒子数密度下的基态波函数，从而实现扣除掉激发能的目的，进而得到反应体系的熔合势垒[77]。由于这种方法无需采用任何近似，能够微观自洽地获得复合系统的基态，因此在研究重离子熔合势垒方面取得了显著的成功[41,77,90-92]。特别是在解释壳效应和准裂变等方面，它展现出了非常明显的优势[93-97]。然而，这种方法计算过程非常耗时，因此很难直接大规模地应用于熔合反应的系统研究中。

1.4 本文工作

熔合势垒在重离子熔合反应中的重要性不言而喻，基于前面的讨论，我们将试图回答以下几个问题：

1. 如何准确地计算重离子熔合反应中的动力学势垒？DC-TDHF 虽然能够解决这一问题，但是由于非常耗时，如何在精确度得以保证的前提下，能够用较低的计算

成本系统开展势垒高度的微观计算？

2. 由于实验上直接测量的是熔合激发函数，如何基于 TDHF 理论准确计算垒下以及垒上的熔合截面，并且弄清导致垒下截面增强或压低的物理机制？
3. 由于微观动力学模型计算出来的势垒存在能量依赖，如何能够消除能量依赖带来的不确定性，从而可以与实验数据进行定量比较？由于 TDHF 模型非常耗时，目前还没有人利用 TDHF 模型对实验上提取出来的几百个重离子熔合势垒高度进行系统计算。如果能开展这样的系统研究，无论是对于检验 TDHF 理论模型，还是对于弄清熔合反应机制都非常有帮助。
4. 对于合成超重核的熔合体系，由于准裂变的出现，俘获势垒会有哪些不同？如何从实验上以及 TDHF 理论模拟中区分准裂变与深度非弹性散射？

本文将围绕上面几个问题，开展微观动力学研究，旨在构建一套理论方法来准确地计算重离子熔合反应的势垒信息与俘获截面，并通过从轻到重上百个反应体系的系统研究，弄清楚近垒熔合反应机制以及超重体系的不同之处，为实验上合成新的超重核提供重要的理论支撑。

本文的主要安排如下：第二章详细介绍 Skyrme 相互作用、Skyrme-Hartree-Fock 方法以及用到的两个理论模型：TDHF 模型和 ImQMD 模型；第三章系统研究重离子熔合势垒，具体内容包括使用 TDHF 模型对重离子熔合势垒高度的系统计算以及对超重核体系俘获势阱的系统研究；第四章对重离子核-核相互作用势进行微观动力学研究，研究内容主要包括对重离子核-核相互作用势的微观描述、熔合激发函数的理论研究以及在 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中的形变效应的具体探讨。第五章给出总结和展望。

第二章 理论模型

原子核是一个复杂的量子多体系统，在非相对论框架下核子的运动的薛定谔方程为

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

精确求解该运动方程有两个挑战：第一个挑战是相互作用项 $\hat{H}$ 无法通过基本相互作用精确得到。核力是夸克间强相互作用的剩余相互作用，理论上可以从描述强相互作用量子色动力学 (QCD) 导出核力。但 QCD 在原子核尺度能量下是非微扰的，这给从 QCD 出发描述核力带来了极大的困难。最近几十年来，根据核力的短程特性发展的有效相互作用 Skyrme 力[98] 和 Gogny 力[99] 取得了极大成功。因此，在微观核结构和核反应计算中，常常采用的是有效核力；另一个挑战是求解量子多体系统的困难。自洽平均场 (SMF) 理论和密度泛函 (DFT) 理论都是处理多体问题的有效工具，它们通过将多体问题转化为无相互作用的单体问题求解，极大简化了求解过程，是描述核结构和核反应动力学常用的方法。

SMF 理论最早可以追溯到 1928 年由 Hartree 等人提出的 Hartree 理论[100]，它将多电子体系的电子近似为独立运动，体系的波函数表示为单电子波函数的乘积。由于这种乘积无法满足费米子的交换反对称性，Fock 等人在 1930 年将费米子的交换性考虑进来，他们提出在 Hartree 工作的基础上，用单电子波函数组成的 Slater 行列式代替它们的乘积[101]。这就是大家熟知的 Hartree-Fock(HF) 理论，它被广泛应用于核物理的研究中。DFT 理论起源于上世纪六十年的两个奠基性工作。第一个是 P. Hohenberg 和 W. Kohn 在 1964 年证明了系统的能量可以由密度唯一确定[102]，这一发现奠定了 DFT 理论基础。第二个是在 1965 年，W. Kohn 和 L. J. Sham 提出可用无相互作用的参考系统替代真实系统，由此建立了著名的 Kohn-Sham 方程[103]。该理论的提出使得 DFT 理论能够在实际问题中得以真正付诸实施。DFT 自被提出以来，便在物理、化学、材料和生命科学等多个领域中发挥着非常重要的作用。

动力学问题可以被视为定态问题的动力学扩展，原则上，处理定态问题的理论方法在动力学问题中同样适用。变分原理为建立这种联系提供了桥梁。在反应过程中，系统

的作用量表示为

$$S \equiv S_{t_0, t_1}[\Psi] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\langle \Psi(\mathbf{r}, t) \left| \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H} \right) \right| \Psi(\mathbf{r}, t) \right\rangle. \quad (2.2)$$

如果多体波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 能够遍历整个 Hilbert 空间, 式(2.2)则可以导出精确的薛定谔方程。在实际计算中, 通常采用近似方法, 如 Hartree 理论或 Hartree-Fock 理论, 近似处理 $\Psi(\mathbf{r}, t)$, 核力也需要使用有效核力。目前, ImQMD 模型和 TDHF 模型都采用了 Skyrme 力, 它们的平均场 $\hat{h}$ 都基于 Skyrme 能量密度泛函的形式, 但两者在处理波函数时采用了不同的近似方法。

本章将详细介绍 TDHF 模型和 ImQMD 模型。具体安排如下: 在 2.1 节中, 我们将介绍 Skyrme 相互作用, 这是两种模型共同采用的相互作用。在 2.2 节中, 我们将介绍 HF 方程, 并介绍 Skyrme 力在 HF 方法的框架下, 平均场 $\hat{h}$ 的具体表达式。在 2.3 节中, 我们将介绍 ImQMD 模型, 包括其理论基础及在核物理研究中的应用。最后, 在 2.4 节中, 我们将介绍 TDHF 模型, 包括其理论基础及在核物理研究中的应用。

2.1 Skyrme 相互作用

随着原子核质量数的增加, 直接使用现实核力会遇到处理硬的排斥芯和求解多体系统的困难。基于核力的基本性质提出的有效相互作用, 并结合密度泛函理论, 能够近似解决这两个难题, 从而使我们能够求解原子核的各种基态和激发态的性质。Skyrme 相互作用是由 Skyrme 提出的一种有效的二体和三体相互作用[98]。它与现实核力之间的联系可以通过多种方法建立, 例如 Negele 和 Vautherin 的密度矩阵展开法[104], 该方法通过核物质隐式地建立这种联系, 或者通过更直接的方法[105-106]。此外, 可以将 Skyrme 相互作用重新表述为能量密度泛函 (EDF) 的形式[107]。Skyrme 相互作用包含动量相关项及其若干可调参数, 使得它能够很好地模拟真实核子间的相互作用。

Skyrme 相互作用包含两体项和三体项:

$$V = \sum_{i < j} v_{ij}^{(2)} + \sum_{i < j < k} v_{ijk}^{(3)}. \quad (2.3)$$

其中两体项表示为

$$\begin{aligned}
v_{12}^{(2)} = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{t_1}{2}(1 + x_1 P_\sigma) [\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \\
& + t_2(1 + x_2 P_\sigma) \mathbf{k}' \cdot \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k} + iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot (\mathbf{k}' \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}) \\
& + \frac{t_e}{2} \left\{ [3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}') - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}'^2] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right. \\
& + [3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}^2] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \left. \right\} \\
& + t_o \left\{ [3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right\}
\end{aligned} \quad (2.4)$$

其中, $\mathbf{k} = \frac{1}{2i}(\nabla_1 - \nabla_2)$ 向右作用, $\mathbf{k}' = -\frac{1}{2i}(\nabla'_1 - \nabla'_2)$ 向左作用, P_σ 为自旋交换算符, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Pauli 矩阵。

三体项表示为

$$v_{123}^{(3)} = t_3 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \quad (2.5)$$

式(2.3)中包含了一些未知参数, 这些参数包括接触项 (t_0 、 x_0)、动量依赖项 (t_1 、 t_2 、 x_1 、 x_2)、自旋-轨道项 (W_0)、张量项 (t_e 和 t_o) 以及三体项 (t_3)。

在实际计算中, 广泛采用与密度 $\rho(\mathbf{r})$ 相关的两体相互作用代替三体相互作用[108]:

$$v_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{t_3}{6} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rho^\alpha(\mathbf{r}_1) (1 + x_3 P_\sigma). \quad (2.6)$$

式中新增了一个参数 x_3 , 以及一个可以取非整数值的参数 α 。因此, 它打破了“相互作用”与力之间的直接联系。迄今为止, 人们根据原子核的各种性质拟合了几百套 Skyrme 参数, 其中包括 SLy 系列、SV 系列、T 系列、SK 系列等等。这些参数在预测的核性质上存在显著的差异, 尤其是在核物质密度偏离常规密度时[109]。

在本论文的工作中, 由于我们不考虑张量力的影响, 因次, 将 t_o 和 t_e 的系数取为零。

2.2 Skyrme-Hartree-Fock 理论

在 HF 理论中, 体系的波函数用单粒子波函数组成的 Slater 行列式表示,

$$\Phi_{\text{HF}} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_1) & \psi_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & \psi_1(\mathbf{x}_A) \\ \psi_2(\mathbf{x}_1) & \psi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \psi_2(\mathbf{x}_A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_A(\mathbf{x}_1) & \psi_A(\mathbf{x}_2) & \cdots & \psi_A(\mathbf{x}_A) \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

这里, $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}\sigma q)$ 表示粒子的坐标, 包含位置 $\mathbf{r}$ 、自旋 σ 和同位旋 q , A 为体系的核子数。体系的总能量可以表示为

$$E = \langle \Phi_{\text{HF}} | \hat{H} | \Phi_{\text{HF}} \rangle = E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]. \quad (2.8)$$

其中密度矩阵 $\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A \psi_i^*(\mathbf{x}') \psi_i(\mathbf{x})$ 。因为 $\psi_i^*(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})$ 为独立变量, 所以

$$\delta E = \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]}{\partial \psi_i^*(\mathbf{x})} \delta \psi_i^*(\mathbf{x}) + \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]}{\partial \psi_i(\mathbf{x})} \delta \psi_i(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

根据变分原理, 在保证归一化条件 ($\langle \psi_i^* \psi_i \rangle = 1, i = 1, 2, \dots, A$) 下, 对能量 E 取极小值 $\delta E = 0$, 考虑到 $\delta \psi_i^*(\mathbf{x})$ 和 $\delta \psi_i(\mathbf{x})$ 的任意性,

$$\begin{aligned} \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})] - \sum_i^A \lambda_i \delta[\psi_i^*(\mathbf{x}') \psi_i(\mathbf{x})]}{\partial \psi_i^*(\mathbf{x})} &= 0 \\ \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})] - \sum_i^A \lambda_i^* \delta[\psi_i^*(\mathbf{x}') \psi_i(\mathbf{x})]}{\partial \psi_i(\mathbf{x})} &= 0 \end{aligned}, \quad (2.10)$$

λ_i 和 λ_i^* 为 Lagrange 乘子。利用求导的链式法则, 其中,

$$\frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x})} = \int d\mathbf{y} d\mathbf{y}' \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]}{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}')} \frac{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}')}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x})} \quad (2.11)$$

($\int d\mathbf{y} \equiv \sum_{\sigma q} \int d\mathbf{r}$)。将(2.11)式代入(2.10)中, 可以得到大家熟知的 HF 方程

$$\int d\mathbf{y} \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_i \psi_i(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

同理, 可得到 HF 方程的共轭方程

$$\int d\mathbf{y} \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_i^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_i^* \psi_i^*(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

这里，定义了一个单粒子哈密顿量 $\hat{h}$:

$$\hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta E[\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x})]}{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})}. \quad (2.14)$$

可以证明 $\hat{h}$ 是厄米算符，因此 $\lambda_i = \lambda_i^*$ 。将相互作用的具体形式代入2.8公式中，根据式2.14，可以导出 $\hat{h}$ 的具体表达式。

基于 Skyrme 相互作用，体系的哈密顿量可以表式为

$$\hat{H}_{\text{Skyrme}} = \sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \hat{V}_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k}^A \hat{V}_{ijk} + \hat{V}_{\text{Coul}}. \quad (2.15)$$

其中， $\hat{V}_{ij}$ 和 $\hat{V}_{ijk}$ 采用2.3式， $\hat{V}_{\text{Coul}}$ 写为

$$\hat{V}_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \delta_{q_i p} \delta_{q_j p}. \quad (2.16)$$

通过引入以下几种密度，

(1) 粒子数密度:

$$\rho_q(\mathbf{r}) = \sum_{i \in q} \sum_s \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

(2) 动能密度:

$$\tau_q(\mathbf{r}) = \sum_{i \in q} \sum_s \nabla \psi_i^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_i(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

(3) 自旋密度:

$$\mathbf{s}_q(\mathbf{r}) = \sum_{i \in q} \sum_s \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \langle \sigma_1 | \hat{\sigma} | \sigma_2 \rangle, \quad (2.19)$$

(4) 流密度:

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} \sum_{i \in q} \sum_s \{ \psi_i^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_i(\mathbf{r}) - \psi_i(\mathbf{r}) \nabla \psi_i^*(\mathbf{r}) \}, \quad (2.20)$$

(5) 自旋轨道密度:

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) = -i \sum_{i \in q} \sum_s \psi_i^*(\mathbf{r}) \nabla \times \langle \sigma_1 | \hat{\sigma} | \sigma_2 \rangle \psi_i(\mathbf{r}). \quad (2.21)$$

其中, q 用来标记核子, $q = p$ 表示质子, $q = n$ 表示中子。体系的总能量表示为

$$\begin{aligned} E_{\text{Skyrme}} &= \langle \Phi | \hat{H}_{\text{Skyrme}} | \Phi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^A \langle \psi_i | \frac{p_i^2}{2m_i} | \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \langle \psi_i \psi_j | v^{(2)} | \psi_i \psi_j \rangle + \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k}^A \langle \psi_i \psi_j \psi_k | v^{(3)} | \psi_i \psi_j \psi_k \rangle \\ &= E[\rho, \tau, \mathbf{s}, \mathbf{j}, \mathbf{J}]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

将 E_{Skyrme} 按不同项分别写为,

- T : (动能项)

$$T = \sum_q \frac{\hbar^2}{2m_q} \int d\mathbf{r} \tau_q, \quad (2.23)$$

- E_0 : (包含参数 b_0 和 b'_0)

$$E_0 = \int d\mathbf{r} \left(\frac{b_0}{2} \rho^2 - \frac{b'_0}{2} \sum_q \rho_q^2 \right), \quad (2.24)$$

- E_1 : (包含参数 b_1 和 b'_1)

$$E_1 = \int d\mathbf{r} \left(b_1 [\rho \tau - \mathbf{j}^2] - b'_1 \sum_q [\rho_q \tau_q - \mathbf{j}_q^2] \right), \quad (2.25)$$

- E_2 : (包含参数 b_2 和 b'_2)

$$E_2 = \int d\mathbf{r} \left(-\frac{b_2}{2} \rho \Delta \rho + \frac{b'_2}{2} \sum_q \rho_q \Delta \rho_q \right), \quad (2.26)$$

- E_3 : (三体项, 包含参数 b_3 和 b'_3)

$$E_3 = \int d\mathbf{r} \left(\frac{b_3}{3} \rho^{\alpha+2} - \frac{b'_3}{3} \rho^\alpha \sum_q \rho_q^2 \right), \quad (2.27)$$

- E_{ls} : (自旋轨道耦合项, 包含参数 b_4 和 b'_4)

$$E_{ls} = \int d\mathbf{r} \left(-b_4 [\rho \nabla \cdot \mathbf{J} + \sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{j})] - b'_4 \sum_q [\rho_q \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{j}_q)] \right), \quad (2.28)$$

- E_c : (库仑项)

$$E_c = \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\rho_p(\mathbf{r}) \rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int d\mathbf{r} \frac{3e^2}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_p^{\frac{4}{3}}. \quad (2.29)$$

上面的参数与 Skyrme 相互作用中的参数有如下对应关系:

$$\begin{aligned} b_0 &= t_0 \left(1 + \frac{1}{2} x_0 \right), & b'_0 &= t_0 \left(\frac{1}{2} + x_0 \right) \\ b_1 &= \frac{1}{4} \left[t_1 \left(1 + \frac{1}{2} x_1 \right) + t_2 \left(1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \right] \\ b'_1 &= \frac{1}{4} \left[t_1 \left(\frac{1}{2} + x_1 \right) - t_2 \left(\frac{1}{2} + x_2 \right) \right] \\ b_2 &= \frac{1}{8} \left[3t_1 \left(1 + \frac{1}{2} x_1 \right) - t_2 \left(1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \right] \\ b'_2 &= \frac{1}{8} \left[3t_1 \left(\frac{1}{2} + x_1 \right) + t_2 \left(\frac{1}{2} + x_2 \right) \right] \\ b_3 &= \frac{1}{4} t_3 \left(1 + \frac{1}{2} x_3 \right), & b'_3 &= \frac{1}{4} t_3 \left(\frac{1}{2} + x_3 \right) \\ b_4 &= \frac{1}{2} W_0, & b'_4 &= b_4. \end{aligned} \quad (2.30)$$

跟据(2.22)式, 分别对 $(\rho, \tau, \mathbf{s}, \mathbf{j}, \mathbf{J})$ 作变分, 可以得到单粒子哈密顿量 $\hat{h}$, 表示如下:

$$\hat{h} = U_q - \nabla \cdot [B_q \nabla] + i \mathbf{W}_q \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) + \mathbf{S}_q \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{A}_q) + 2 \mathbf{A}_q \cdot \nabla]. \quad (2.31)$$

其中，第一项为中心势:

$$\begin{aligned}
 U_q = & b_0\rho - b'_0\rho_q + b_1\tau - b'_1\tau_q - b_2\Delta\rho + b'_2\Delta\rho_q \\
 & + b_3\frac{\alpha+2}{3}\rho^{\alpha+1} - b'_3\frac{2}{3}\rho^\alpha\rho_q - b'_3\frac{\alpha}{3}\rho^{\alpha-1}\sum_{q'}\rho_{q'}^2 \\
 & - b_4\nabla\cdot\mathbf{J} - b'_4\nabla\cdot\mathbf{J}_q.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

第二项为有效质量项:

$$B_q = \frac{\hbar^2}{2m_q} + b_1\rho - b'_1\rho_q = \frac{\hbar^2}{2m_q^*}. \tag{2.33}$$

第三项是自旋轨道项:

$$\mathbf{W}_q = b_4\nabla\rho + b'_4\nabla\rho_q. \tag{2.34}$$

后面两项分别为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_q &= -2b_1\mathbf{j} + 2b'_1\mathbf{j}_q - b_4\nabla\times\boldsymbol{\sigma} - b'_4\nabla\times\boldsymbol{\sigma}_q, \\
 \mathbf{S}_q &= -b_4\nabla\times\mathbf{j} - b'_4\nabla\times\mathbf{j}_q.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.3 时间相关的 Hartree-Fock 模型

时间相关的 Hartree-Fock 理论 (TDHF) 最初由 Dirac 于 1930 年提出[110], 用于描述原子中的多电子问题。后来, 在 1976 年, Boneche 等人首次将 TDHF 理论应用于核物理的研究中[80]。在 TDHF 理论中, 系统波函数在演化过程中始终保持为 Slater 行列式的形式, 这导致了一些需要超越 Slater 行列式描述的量子效应, 如量子隧穿效应, 没有被该模型考虑, 这是 TDHF 理论的主要限制。

在 TDHF 模型中, 式(2.2)中的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 采用 Hartree-Fock 近似。它是由 t 时刻

的单粒子波函数 $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ 组成的行列式构成,

$$\Psi(t) \approx \Phi_{\text{HF}}(t) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbf{x}_1, t) & \psi_1(\mathbf{x}_2, t) & \cdots & \psi_1(\mathbf{x}_A, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}_1, t) & \psi_2(\mathbf{x}_2, t) & \cdots & \psi_2(\mathbf{x}_A, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_A(\mathbf{x}_1, t) & \psi_A(\mathbf{x}_2, t) & \cdots & \psi_A(\mathbf{x}_A, t) \end{vmatrix}. \quad (2.36)$$

这里, $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}\sigma q)$ 表示粒子的坐标, 包含位置 $\mathbf{r}$ 、自旋 σ 和同位旋 q , A 为体系的核子数。式(2.2)中的哈密顿量 $\hat{H}$ 表示为

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^A \hat{V}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (2.37)$$

其中, 动量算符 $\hat{p}_i$ 是普适的, $\hat{V}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 采用 Skyrme 相互作用的形式, 即式2.3。

将(2.36)式和(2.37)代入到(2.2)式中, 作用量 S 写成如下两部分,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \Phi_{\text{HF}}(t) | i\hbar \frac{d}{dt} | \Phi_{\text{HF}}(t) \rangle &= \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i i\hbar \int d\mathbf{x} \left(\psi_i^*(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \psi_i(\mathbf{x}, t) \right) \\ \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \Phi_{\text{HF}}(t) | \hat{H} | \Phi_{\text{HF}}(t) \rangle &= \int_{t_0}^{t_1} dt E[\rho(t)]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中 $\int d\mathbf{x} = \sum_{\sigma q} d\mathbf{r}$, $\rho(t) = \sum_{i=1}^A \psi_i^*(\mathbf{x}', t) \psi_i(\mathbf{x}, t)$ 。因为 $\psi_i^*(\mathbf{x}, t)$, $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ 为独立变量, 所以,

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)} \delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta S}{\delta \psi_i(\mathbf{x}, t)} \delta \psi_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.39)$$

根据变分原理, 对作用量 S 取极小值 $\delta S = 0$, 考虑到 $\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)$ 和 $\delta \psi_i(\mathbf{x}, t)$ 是任意的, 因此,

$$\frac{\partial S}{\partial \psi_i^*(\mathbf{x}, t)} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \psi_i(\mathbf{x}, t)} = 0. \quad (2.40)$$

其中,

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)} = i\hbar \frac{d}{dt} \psi_i(\mathbf{x}, t) - \int_{t_0}^{t_1} dt' \frac{\delta E[\rho(t')]}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.41)$$

利用求导的链式法则，可以将上式 $E[\rho(t')]$ 对 $\psi_i^*(x, t)$ 的微分写成如下形式，

$$\begin{aligned} \frac{\delta E[\rho(t')]}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)} &= \int d\mathbf{y} d\mathbf{y}' \frac{\delta E[\rho(t')]}{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')} \frac{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')}{\delta \psi_i^*(\mathbf{x}, t)} \\ &= \int d\mathbf{y} \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \psi_i(\mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

这里，定义了一个单粒子哈密顿量 $\hat{h}$:

$$\hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \frac{\delta E[\rho(t)]}{\delta \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t)}. \quad (2.43)$$

可以看出， $\hat{h}$ 与式(2.31)中 $\hat{h}$ 形式上是一致的，它们的泛函形式相同，它也是一个厄米算符。将(2.42)和(2.41)代入式(2.40)中，可以得到在坐标表象下的单粒子运动方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_i(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \psi_i(\mathbf{y}, t). \quad (2.44)$$

同理，通过对 $\delta \psi_i(\mathbf{x}, t)$ 变分，可以得到

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_i^*(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \psi_i^*(\mathbf{y}, t). \quad (2.45)$$

由于 Skyrme 相互作用是零程力，(2.44)式可以简化为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_i(\mathbf{x}, t) = \hat{h}(\mathbf{x}, t) \psi_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.46)$$

方程(2.46)满足如下两个重要关系，

(1) 单粒子波函数的内积不随时间变化

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | (\hat{h} - \hat{h}^\dagger) | \psi_i \rangle = 0. \quad (2.47)$$

(2) 单粒子算符 F 的平均值不随时间变化

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle F \rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_i \langle \psi_i | F | \psi_i \rangle = \sum_i \langle \psi_i | [F, \hat{h}] | \psi_i \rangle = 0. \quad (2.48)$$

在利用 TDHF 方法模拟核反应的过程中，在 $t = 0$ 时刻弹靶核的初始波函数分别设定为

$$\begin{aligned}\psi_{i,1}(\mathbf{r}, \sigma; t = 0) &= e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}} \psi_{i,1}^{(\text{stat})}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1, \sigma), \quad \mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{A_1} \\ \psi_{i,2}(\mathbf{r}, \sigma; t = 0) &= e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}} \psi_{i,2}^{(\text{stat})}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2, \sigma), \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{p}_2}{A_2}\end{aligned}\quad (2.49)$$

其中，1 和 2 分别表示弹核和靶核， $\mathbf{p}$ 可以通过入射能量 $E_{\text{c.m.}}$ 和碰撞参数计算得到 ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$)，波函数 $\psi_i^{(\text{stat})}(\mathbf{r} - \mathbf{R}, s)$ 是通过 HF 方法计算得到的波函数，并经过平移 $\mathbf{R}$ 后得到的。

TDHF 理论是解决量子多体问题的一系列方法中的最低阶近似，它在平均场层次上描述量子多体动力学具有普遍适用性。近年来，随着计算能力的显著提升，TDHF 模型得到了极大的发展。这使得其应用范围大大拓宽，并允许与实验数据进行比较，已成为描述低能核反应的首选工具之一。例如，TDHF 模型被广泛用于研究熔合反应[41,77,90-92]、多核子转移反应[111-114] 及准裂变反应[93-97] 等。最近，在 TDHF 模型中考虑对关联效应，被用来研究核裂变过程中从鞍点到断裂的动力学行为[115]。

2.4 改进的量子分子动力学模型

量子分子动力学模型 (QMD) 是在 20 世纪 80 年代由 Aichelin 等人在分子动力学 (MD) 模型基础上建立的，它考虑了核子的量子效应和两体关联[116]。该模型主要应用于中高能重离子核反应研究，如原子核多重碎裂[117-118]、核物质状态方程[119]、核反应机制[120] 等。王宁等人在 2002 年发展了 QMD 模型，并将其命名为 ImQMD 模型[121]。ImQMD 模型作为 QMD 模型的改进版本，在继承原有模型优点的基础上，进一步拓展了其应用范围，特别是在低能重离子核反应的研究领域：例如熔合反应[121] 和多核子转移反应[122] 等。

在 ImQMD 模型中，(2.2)式中的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 采用 Hartree 近似，它是由单粒子波函数用相干态高斯波包的直积构成，

$$\Psi(t) = \prod_i \psi_i(\mathbf{r}, t) = \prod_i \frac{1}{(2\pi L)^{3/4}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{4L} + \frac{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right] \quad (2.50)$$

其中 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{p}_i$ 为第 i 个粒子分别在坐标表象和动量表象的波包中心, $L = \sigma_r^2, \sigma_r^2 \cdot \sigma_p^2 = \hbar/2$, σ_r 一般取与体系大小相关的参数。将公式(2.50)代入(2.2)中, 系统的作用量 S 可以重新表示为

$$S = \langle \Psi(t) | i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H} | \Psi(t) \rangle = \sum_i (-\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i - H). \quad (2.51)$$

其中,

$$H = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2m} \frac{3\hbar^2}{4L} \right) + \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij}, \quad (2.52)$$

根据欧拉方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0. \quad (2.53)$$

其中, q_ν 表示作用量 S 中的 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$, 便可以得到坐标和动量满足的运动方程,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (2.54)$$

它是一个经典运动方程, 不包含任何量子效应。由于式(2.50)中不包含自旋自由度, 所以式(2.3)中自旋轨道相互作用对体系的贡献为零。

为了恰当地考虑量子效应, QMD 模型采用了 Wigner 变换[123], 该变换通过 Wigner 函数这一与波函数或密度矩阵等价的实函数形式, 在经典相空间中表示量子力学, 同时保持了动量和位置满足的不确定性关系。根据 Wigner 变换, 第 i 个粒子的相空间分布函数为

$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \exp\left(\frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{2\sigma_r^2}\right) \exp\left(\frac{-(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)^2}{2\sigma_p^2}\right). \quad (2.55)$$

由它可以得到每个核子在坐标空间的密度分布:

$$\rho_i(\mathbf{r}) = \int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{1}{(2\pi\sigma_r^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{2\sigma_r^2}\right), \quad (2.56)$$

及系统在坐标空间的密度分布:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \rho_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_r^2)^{3/2}} \sum_i \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{2\sigma_r^2}\right). \quad (2.57)$$

基于 Skyrme 相互作用，系统的总能量可以表示为

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} \\
 &= \int \rho(\mathbf{r}_i) \hat{h}_{\text{Skyrme}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \rho(\mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

将 $\hat{h}_{\text{Skyrme}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ 代入(2.31)中，可以得到哈密顿量 H 的表达式。

在 ImQMD 模型中，哈密顿量 H 的表达式为

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{\alpha}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\rho_{ij}}{\rho_0} + \frac{\beta}{\gamma + 1} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{\rho_{ij}}{\rho_0} \right)^\gamma + \frac{g_0}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} f_s \frac{\rho_{ij}}{\rho_0} + g_\tau \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{\rho_{ij}}{\rho_0} \right)^\eta \\
 &\quad + \frac{c_s}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} t_{iz} t_{jz} \frac{\rho_{ij}}{\rho_0} (1 - \kappa_s f_s) + \frac{e^2}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}} \text{erf}\left(\frac{r_{ij}}{\sqrt{4\sigma_r^2}}\right) \delta_{iz} \delta_{jz}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

其中，

$$\rho_{ij} = \frac{1}{(4\pi\sigma_r^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{4\sigma_r^2}\right],$$

$$f_s = \frac{3}{2\sigma_r^2} - \left(\frac{r_{ij}}{2\sigma_r^2}\right)^2,$$

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|,$$

$$t_{iz}(t_{jz}) = \begin{cases} 1, & \text{proton} \\ -1, & \text{neutron} \end{cases},$$

$$\delta_{iz}(\delta_{jz}) = \begin{cases} 1, & \text{proton} \\ 0, & \text{neutron} \end{cases}.$$

上式中， α 、 β 、 γ 、 g_{sur} 、 g_τ 、 η 、 c_s 、 κ_s 及 ρ_0 为模型参数。

在利用 ImQMD 模型模拟核反应之前，需要对弹靶核进行初始化。具体流程如下：首先，根据基态原子核的密度分布，利用 Monte-Carlo 方法抽取每个核子的空间位置。然后，根据抽样出来的密度分布计算费米动量，再利用 Monte-Carlo 方法抽样每个核子的动量。为了核子在相空间分布更加合理，在抽样核子坐标和动量时需要对核子间的距

离和相空间距离加一些限制, 如 $\Delta r \geq 1.5 \text{ fm}$ 及 $\Delta r \cdot \Delta p \approx h/4$ 。最后, 根据核子的位置和动量计算的原子核结合能和均方根半径, 与实验数据对比, 如果不符合则重新抽样, 符合可以被认为是“好的初始核”。

ImQMD 模型在平均场理论的基础上, 适当考虑了核子间的两体碰撞机制, 从而在一定程度上弥补了传统 TDHF 模型在描述耗散方面的不足。相较于 TDHF 模型, ImQMD 模型能够适应更广泛的能量范围。此外, 它能够有效地引入涨落效应, 这使得它能较合理地描述如碎块形成等复杂物理图像。目前, ImQMD 模型已成为研究重离子核反应的重要工具之一, 在低中高能区均被广泛运用。

第三章 重离子熔合势垒的系统研究

重离子熔合反应对于理解核力、超重核合成以及天体核合成等具有重要的意义，它涉及复杂的相互作用和动力学过程，其反应机制至今仍不完全清楚。熔合势垒是重离子熔合反应中至关重要的物理量，对其进行系统研究，不仅有助于深入理解核力，揭示熔合反应过程中的微观机制，同时也有利于进一步约束和完善相关理论模型。

在本章中，我们对熔合势垒开展了系统研究。首先，在 3.1 节中，我们利用 TDHF 模型计算了 144 组近球形体系的俘获阈能，并与通过拟合实验熔合激发函数提取的势垒高度值进行了比较。接着，在 3.2 节中系统研究了 13 个超重复合体系的熔合反应，对这些体系的俘获势阱进行系统了研究。最后，在 3.3 中对本章进行小结。

3.1 重离子熔合势垒高度的 TDHF 理论计算

3.1.1 引言

重离子熔合反应涉及众多复杂自由度，熔合势垒是这些复杂自由度耦合的结果，因此，它可以作为研究核结构和核反应机制的敏感探针。尤其是在超重核的反应过程，由于熔合势垒的俘获势阱通常较浅，导致准裂变、深度非弹反应和熔合-裂变成激烈竞争，使得此类反应产生的动力学机制异常丰富[124]。同时，重离子核反应机制与入射能量有很强的依赖关系，不同的入射能量涉及不同的动力学过程。

为了理解在熔合过程中的动力学过程，如形变效应[125]、壳效应[126] 和同位旋效应[127] 等对熔合势垒的影响，一些微观模型如 TDHF 模型和 ImQMD 模型被广泛运用于此类研究中。它们自洽包含了颈部动力学及复合系统的接触时间，且不需要额外引入动力学参数。近年来，TDHF 理论对于描述熔合反应尤其是熔合势垒取得了巨大的成功[81-84]。此外，TDHF 模型的理论计算表明，熔合阈能与实验数据能很好地符合[41,128-130]。

自上世纪六十年代以来，实验上测量了上千组不同弹靶体系的熔合激发函数，为理解熔合反应提供了丰富的实验数据。在文中[131]，陈叶若溪等人，基于改进的 Siwek-Wilczyński 熔合截面公式，系统提取了 443 组实验数据的熔合势垒参数。开展熔合势垒高度 TDHF 理论计算值的系统研究将非常有意义，通过与实验数据值的系统比较，有助

于进一步发展理论模型，并进一步评估当前模型的不确定性。

3.1.2 数值细节

在本工作中，式(2.46)中的单粒子运动方程是在 3 维格点空间中进行计算的。为了保证计算精度，针对不同电荷数 Z 的原子核采用不同的盒子大小。

在定态 Hartree-Fock 模型计算中， x 、 y 、 z 方向采用的格点长度分别为：

$$L_x = L_y = L_z = \begin{cases} 24 \text{ fm} & : Z \leq 30 \\ 30 \text{ fm} & : 30 \leq Z \leq 60 \\ 40 \text{ fm} & : 60 \leq Z \leq 100 \end{cases} \quad (3.1)$$

同时格点间距取为 $dx = dy = dz = 1 \text{ fm}$ ，Skyrme 相互作用参数取 SLy6[132]。

当在核反应计算时，需要将两个弹靶核以一定距离 $d\mathbf{R}$ 放在一个更大的三维网格中。由于本工作只涉及弹靶核在 z 轴方向的中心碰撞， x 和 y 方向对碰撞过程关系不大，因此 L_x 与 L_y 的值采用，弹靶核中电荷数 Z 较大的原子核的定态计算时使用的 L_x 和 L_y 值。而 z 方向的取值需要适当增大以容纳碰撞过程中弹靶核的运动范围。对于不同的弹靶体系，设定 $L_z \approx 5(R_1 + R_2) \text{ fm}$ 。其中， $R_1 = 1.4A_1^{1/3}$ ， $R_2 = 1.4A_2^{1/3}$ ， A_1 和 A_2 分别为弹靶核的质量数。此外，Skyrme 相互作用和格点间距与定态计算保持一致，两核的初始距离 $d\mathbf{R} = 2(R_1 + R_2) \text{ fm}$ ，时间间隔 δt 为 0.2 fm/c 。

除了少数几个双幻体系是球形原子核外，其余绝大部分原子核是形变原子核[133-134]。在反应过程中，弹靶核的初始化会涉及形变的取向问题，原则上，实验观测值应为不同取向的加权平均。在计算过程中，不同取向的初始弹核和靶核可以通过对波函数转动不同角度得到[135]。具体步骤大致如下，

- 首先，将定态计算迭代收敛的波函数绕 y 轴进行旋转，旋转算符 $\hat{R}$ 为

$$\hat{R} = \exp\left(-i\frac{\beta\hat{L}_y}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{\beta\hat{\sigma}_y}{2}\right). \quad (3.2)$$

其中 $\hat{\sigma}_y$ 为 y 方向的泡利矩阵。在直角坐标系中,

$$\exp\left(-i\frac{\beta\hat{L}_y}{\hbar}\right) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\exp\left(-i\frac{\beta\hat{\sigma}_y}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

- 然后, 将旋转后的波函数作为初始波函数进行 Hartree-Fock 自洽迭代计算。

理论上, 物理观测量 A 的期待值 $\langle A \rangle$ 应为各个取向计算结果的加权平均:

$$\langle A \rangle = \frac{\iint b g(b, \beta) db d\beta}{\int b db}. \quad (3.5)$$

式中 b 为碰撞参数, $g(b, \beta)$ 为反应概率。在实际计算中, 通常只计算少数几个角度和轨道角动量, 通过将式 3.5 中的积分转化为求和进行近似计算。为了考虑形变取向对熔合势垒的影响, 在一些耦合道模型中, 如 CCFULL[136], 通常在 β 角度在 $0-180^\circ$ 的角度范围内, 选择特定几个角度, 并将权重取为 $\sin\beta$, 近似计算熔合激发函数。研究表明, 这种近似方法能再现大部分形变体系的熔合激发函数[136]。

本工作需要涉及 144 组反应体系熔合阈能的计算, 即使按上述近似方法采取进行计算, 计算量也是特别巨大的。尤其是对于弹靶核都是形变原子核的体系, 需要同时考虑弹靶核的形变取向。因此, 我们以 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 为例, 详细分析了熔合阈能在不同形变取向和不同碰撞参数下的变化情况。图 5 中给出了在 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应中, 弹核的形变取向分别为 $\beta = 0^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ 、 $\beta = 60^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$ 、 $\beta = 120^\circ$ 和 $\beta = 150^\circ$ 度, 体系在不同时刻 $t=0$ fm/c、 $t=100$ fm/c、 $t=200$ fm/c、 $t=300$ fm/c、 $t=400$ fm/c 和 $t=500$ fm/c 下的密度演化。可以看到, 对于不同形变取向, 弹靶核在接触时颈部明显不同。相比其它角度的形变取向, $\beta = 0^\circ$ 这种取向在 $t = 500$ fm/c 时颈部的密度明显偏高, 表明体系发生了更多的核子转移, 这对熔合过程有显著影响, 也会影响熔合阈能。图 6 给出了 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 在不同碰撞参数下计算得到的熔合阈能随形变取向的变化, 熔合阈能的定义我们会在下一节中详

细讨论。可以看到，在 $\beta < 90^\circ$ 时，熔合阈能随着碰撞参数增大而增大，当 $\beta > 90^\circ$ 时，趋势正好相反。由于 TDHF 模型是一个半经典模型，当碰撞参数大于发生熔合反应的临界值时，体系不再发生熔合。计算发现，对于 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 体系，临界碰撞参数为 4 fm，因此图中只有碰撞参数 $b \leq 4\text{fm}$ 的结果。

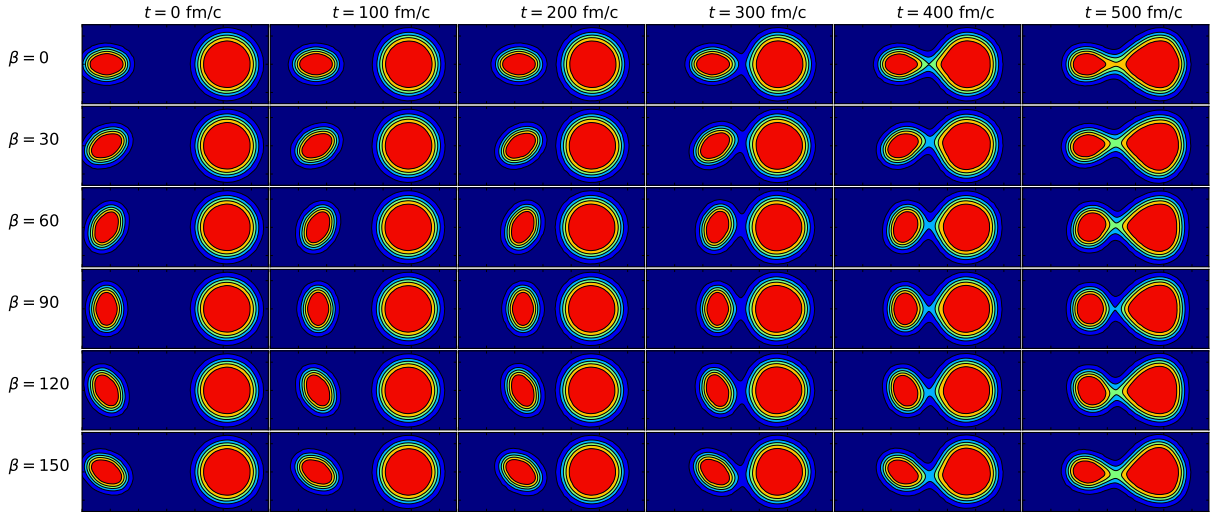


图 5 在 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应中， ^{28}Si 以 $\beta = 0^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ 、 $\beta = 60^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$ 、 $\beta = 120^\circ$ 和 $\beta = 150^\circ$ 取向入射，体系在 $t=0\text{ fm/c}$ 、 100 fm/c 、 200 fm/c 、 300 fm/c 、 400 fm/c 和 500 fm/c 时刻的密度分布。

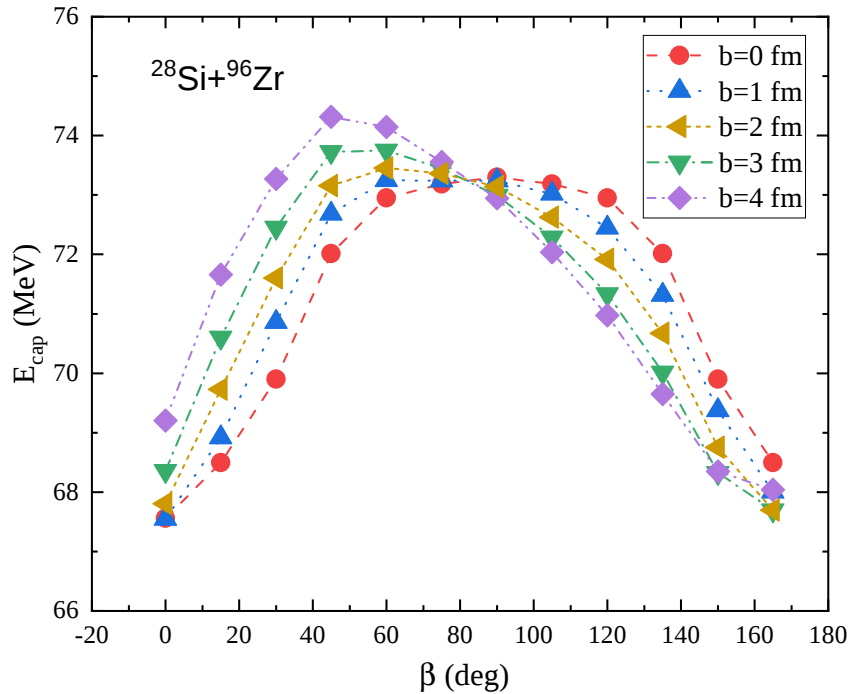


图 6 在 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应中不同碰撞参数下计算得到的俘获阈能随 ^{28}Si 入射角度的变化。

此外，我们注意到熔合阈能的大小介于 $\beta = 0^\circ$ 与 $\beta = 90^\circ$ 之间，这就意味着，只考虑两个特殊方向 $\beta = 0$ 和 $\beta = \pi/2$ ，就能得出熔合阈能的取值范围。当弹靶核都是形变

原子核，这两个方向会涉及到四种不同取向情况（Tip-Tip, Tip-Side, Side-Tip, Side-Side），相应地会得到四个熔合阈能。我们按照从大到小依次记为 $E_{\text{cap}}^{(1)}$ 、 $E_{\text{cap}}^{(2)}$ 、 $E_{\text{cap}}^{(3)}$ 、 $E_{\text{cap}}^{(4)}$ ，当弹靶核都是球形核，这四个值相等。在本工作中，考虑到 $\beta = 0$ 与 $\beta = 90^\circ$ 在反应过程中的权重不同，我们将体系的平均熔合阈能 E_{cap} 近似取为

$$E_{\text{cap}} = \frac{1}{3}(E_{\text{cap}}^{(1)} + E_{\text{cap}}^{(2)}) + \frac{1}{6}(E_{\text{cap}}^{(3)} + E_{\text{cap}}^{(4)}). \quad (3.6)$$

我们注意到，采用上式计算的 E_{cap} 值与 CCFULL 模型中采用的近似方法计算得出的最可几势垒高度值[136] 比较接近。此外，对于 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 体系，根据式(3.6)计算得出的 E_{cap} 值为 71.69 MeV，采用式 (3.5) 对不同角度和碰撞参数加权后的结果为 71.32 MeV，这两个计算结果比较接近。因此，我们在本节的计算中，对于形变原子核，我们只考虑 $\beta = 0$ 和 $\beta = \pi/2$ 两种特殊取向，熔合阈能使用式 (3.6) 近似计算。

3.1.3 计算结果与讨论

3.1.3.1 俘获阈能

TDHF 理论是基于平均场近似的理论，它忽略了量子多体关联，使得它无法模拟微观粒子的量子隧穿行为。因此，TDHF 模型模拟原子核的碰撞过程是一个半经典过程。这就意味着当弹核的入射能量低于某个值时，弹靶核将无法越过势垒形成复合系统，这个临界值被称为熔合阈能。图 7 出了 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 分别在入射能量 $E_{\text{c.m.}}=74.031$ MeV 和 $E_{\text{c.m.}}=74.035$ MeV 下体系密度随时间的演化。可以看到，在 $E_{\text{c.m.}}=74.031$ MeV 入射能量下， $t = 800$ fm/c 两核明显分开，此时发生的是弹性或者准弹性反应。而对于 $E_{\text{c.m.}}=74.035$ MeV 入射能量，在 $t = 800$ fm/c 两核发生了熔合反应。

俘获阈能，顾名思义就是弹靶核发生俘获反应需要入射能量的临界能量，这个值能直接对应熔合势垒高度。在碰撞过程中，弹核需要先越过熔合势垒被靶核俘获，然后才有可能进行熔合过程。这意味着俘获反应与熔合反应的时间尺度明显不一样，熔合反应的接触时间比俘获反应的接触时间大得多。例如，在 $^{64}\text{Ni}+^{238}\text{U}$ [137]、 $^{50}\text{Ti}+^{249}\text{Cf}$ [137]、 $^{86}\text{Kr}+^{197}\text{Au}$ [138]、 $^{86}\text{Kr}+^{198}\text{Pt}$ [138] 这 4 个反应体系中，当在入射能量为库仑位垒附近时，根据实验测量的质量数-角分布估算准裂事件的平均接触时间大约为 3-5 zs ($\text{zs} = 10^{-21}$ s)；ImQMD 模型对 $^{58}\text{Ni}+^{208}\text{Pb}$ [139] 反应体系的计算表明，在入射能量高出库仑位垒约

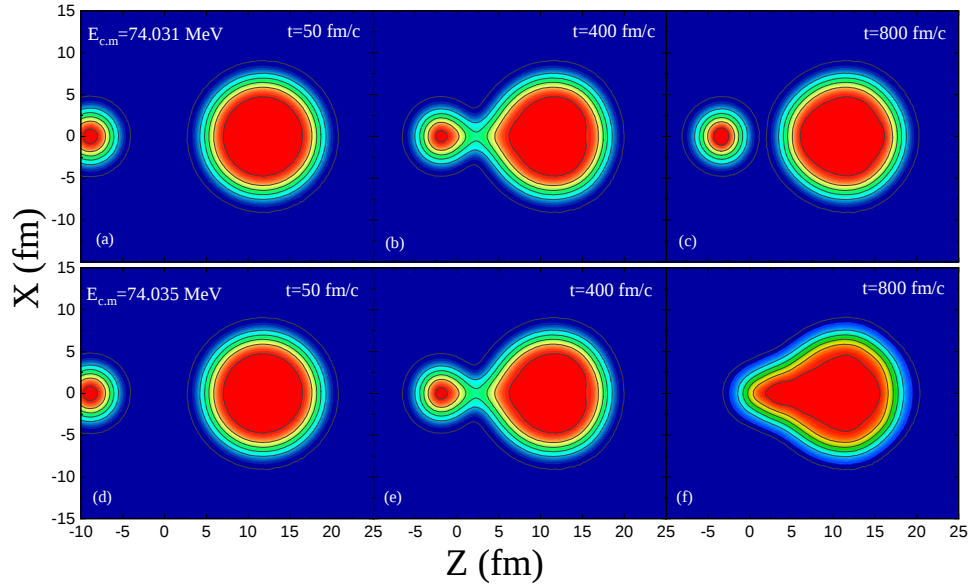


图 7 在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中体系的密度分布随时间的演化，入射能量分别取为 74.031 MeV 和 74.035 MeV。

10% 的条件下，当接触时间小于约 1.4 zs 时，体系发生准弹性和深度非弹性碰撞。TDHF 模型对 $^{58}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ [140] 和 $^{48}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$ [141] 反应体系的研究表明，当入射能量刚好低于俘获势垒的条件下，在头对头碰撞中复合体系的接触时间小于 1.6 zs。因此，可以根据接触时间判定俘获反应与熔合反应和准裂变反应。此外，计算表明，在弹靶核电荷数乘积 $Z_1Z_2 < 1000$ 体系中，TDHF 模型计算的熔合阈能与熔合势垒高度一致。而对于弹靶核电荷数乘积 $Z_1Z_2 > 1000$ 的体系来说，熔合阈能通常要比熔合势垒高度高一些，高出的这部分能量被用作额外推力促使原子核熔合[128]。因此，可以根据接触时间的差异来区分俘获反应和熔合反应。

在本工作中，我们定义发生俘获反应的接触时间 $t_{\text{con}} > 2 \text{ zs}$ 。根据上面分析，这个接触时间对于发生俘获反应是足够的。在 TDHF 模型计算中，弹靶核是否发生接触可以通过体系的粒子密度 $\rho(\mathbf{r})$ 进行判断。文献中[128]认为，当复合体系在颈部处的密度 $\rho(\mathbf{r}) > 0.8 \text{ fm}^{-3}$ 时，弹靶核发生接触并形成复合体系。相反当密度 $\rho(\mathbf{r}) < 0.8 \text{ fm}^{-3}$ 时，此时，弹靶核未形成复合核且两核逐渐远离。因此，可以跟据反应过程中碎片的个数计算接触时间。在计算中，我们采用 DBSCAN 算法[142] 在 X-Z 平面判断碎片个数。它是一种基于密度的空间聚类算法，能够在具有噪声的空间数据中发现任意形状和大小的簇。在 ImQMD 模型中判断碎片采用的最小生成树算法[121] 与 DBSCAN 算法很类似。为了节约计算机时，当弹靶核接触时间 $t_{\text{con}} > 2 \text{ zs}$ 时，程序终止计算，我们认为在该能量下能发生俘获反应；同时，当弹靶核随着时间演化质心距离增大且最趋近距离超过

1.5 fm 时，程序终止计算，我们认为在该能量下发生准弹或深度非弹反应。

图 8 中 (a1) 给出的是，在中心碰撞条件下， $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系分别在不同能量下弹靶核质心距离随入射随时间的变化。可以看到，在 $E_{\text{c.m.}} = 51.9 \text{ MeV}$ 的入射能量下，在 $t = 400 \text{ fm/c}$ 之后，两碎片在库仑排斥的作用下质心距离 R 迅速增加，即发生了两体散射过程。然而，当入射能量略微增加 0.1 MeV 时，在 $t = 1000 \text{ fm/c}$ 后，两个碎片之间的质心距离 R 下降到约 7.5 fm ，这意味着发生了俘获反应。因此，可以将 $E_{\text{cap}} = 51.95 \pm 0.05 \text{ MeV}$ 作为 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系的俘获阈能。此外，可以利用公式 $D(E) = \frac{1}{\pi R_0^2} \frac{d^2(E\sigma(E))}{dE^2}$ 提取势垒分布， $\sigma(E)$ 为实验测量的熔合激发函数。势垒分布中心对应的能量值就是熔合势垒高度值。在图 8 中 (b1) 给出的是根据 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系的熔合激发函数提取的势垒分布，实验数据取自文献[143-144]。为了显示更直观，我们将 x 轴向左移动了 E_{cap} 值。这样当俘获阈能与实验提取的熔合势垒高度接近时，纵坐标峰值对应的横坐标应处在 0 MeV 附近。从图中可以看出，峰值正好位于 0 MeV 附近，表明 TDHF 计算的俘获阈能与实验熔合势垒高度值比较一致。为了在计算中更快速寻找俘获阈能，我们使用二分法进行搜索。通过二分法可以定义一个比较小的能量间隔 ΔE ，当两次计算的能量差小于 ΔE 时终止搜索。在图 8 中 (a2) 给出的是在中心碰撞条件下， $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系分别在不同能量下弹靶核质心距离随入射随时间的变化，这里的入射能量是根据二分法进行选取的。可以看到，在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 体系中，弹靶核质心距离随时间变化的行为与 $^{40}\text{Ca}+^{208}\text{Ca}$ 基本一致，入射能量低于 E_{cap} 时弹靶核在靠近后快速远离，发生两体散射，高于 E_{cap} 时体系发生俘获反应。根据图 8 中 (a2)， $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 体系的俘获阈能为 $E_{\text{cap}} = 74.033 \pm 0.002 \text{ MeV}$ 。同时，与 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 类似，我们在图 8 中 (b2) 给出 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系的势垒分布，实验数据取自[145-146]。可以看到，峰值位于 0 MeV 附近，表明 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系的俘获阈能与实验数据也比较靠近。

本工作利用 TDHF 模型系统性计算了 144 组近球形核参与的熔合反应体系的俘获阈能，具体数值细节在 3.1.2 中作了详细说明。这些反应体系取自[131]中的实验数据。在这里，对于近球形核的判定，我们采用文献中[147]给出的标准，即原子核第一激发态能量大于 1 MeV ，第一激发态的数据取自网站[148]。图 9 给出了 TDHF 计算的俘获阈能与实验数据的相对偏差，误差棒表示在拟合实验数据时提取的势垒高度的不确定性。可以看到，对于大多数体系，相对偏差小于 5%（均方根偏差为 2.48%）。对于微观模型来说，在计算中没有调节参数，这个结果是非常好的。

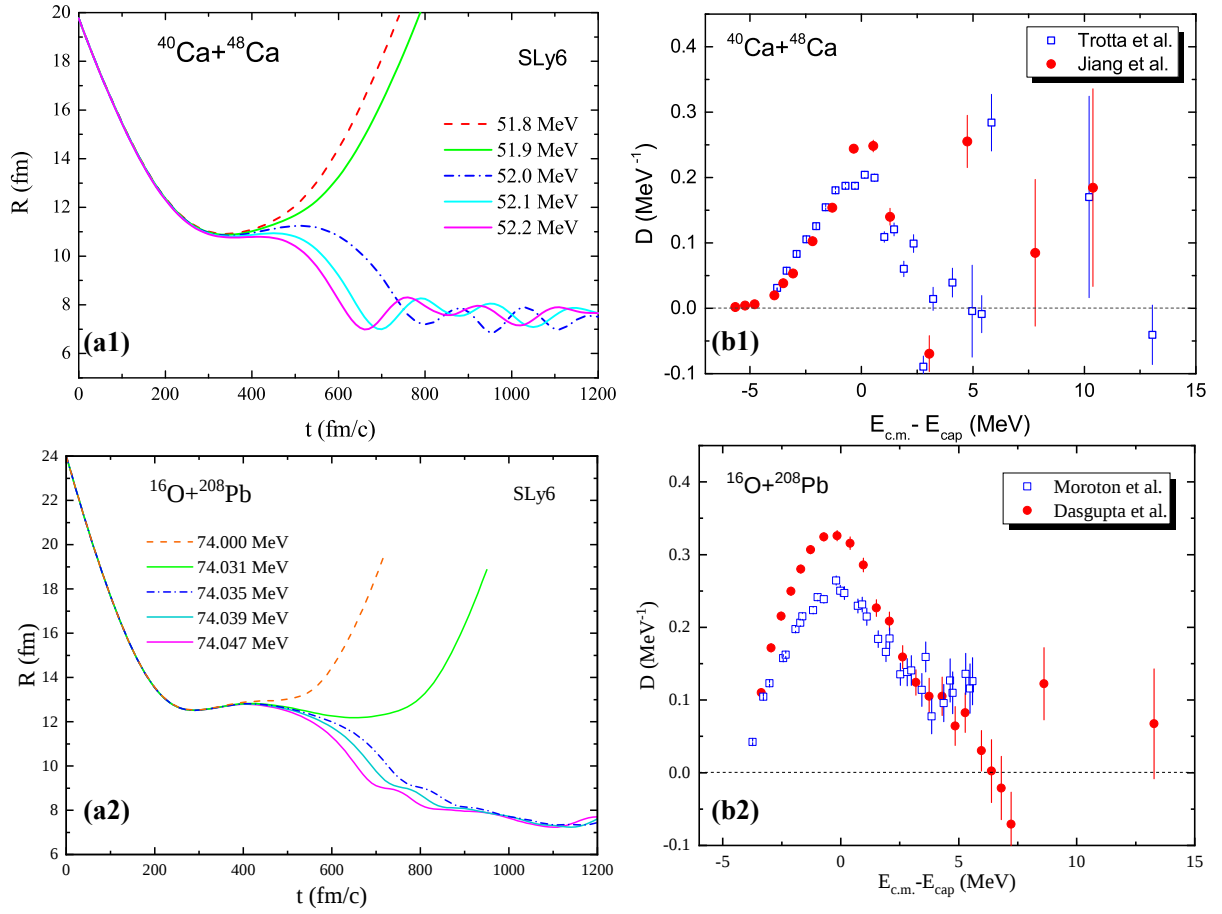


图 8 弹靶核质心距离在不同入射能量下随时间的变化 (a) 及势垒分布与实验值的比较 (b), 其中, (a1) 和 (b1) 显示的是 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 的结果, (a2) 和 (b2) 显示的是 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 的结果, (b1) 和 (b2) 中 x 轴的向左移动了 E_{cap} 值, (b1) 中的实验数据取自[143-144], (b2) 取自[145-146]。

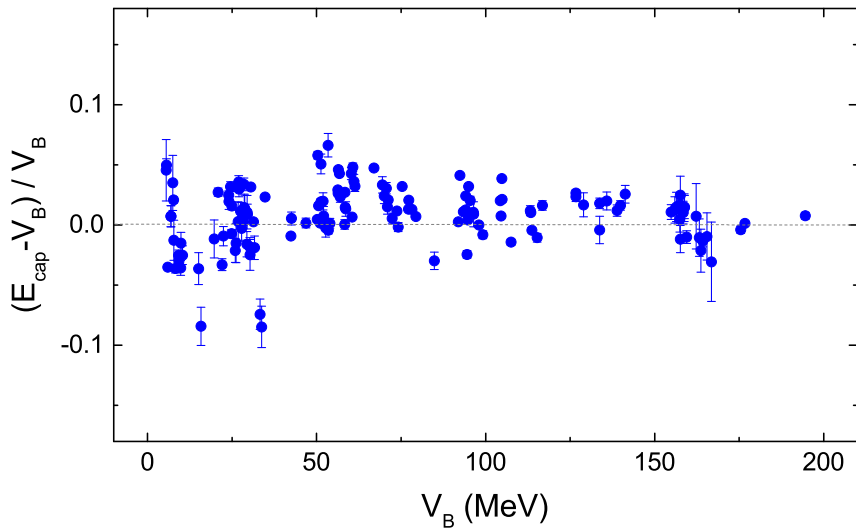


图 9 利用 TDHF 模型计算 144 个近球形体系的俘获阈能与实验数据[131] 的相对偏差。

3.1.3.2 俘获势垒高度

在弹靶核反应过程中，根据能量守恒定律：

$$E_{c.m.} = T + V + E^*. \quad (3.7)$$

式中， $E_{c.m.}$ 是入射能量， T 是体系的相对运动动能， E^* 是激发能。当入射能量达到临界值（俘获阈能）时，反应过程中动能完全转发为势能和激发能。此时，俘获势垒高度可以用俘获阈能 E_{cap} 表示：

$$V_B = E_{cap} - E_{cap}^*. \quad (3.8)$$

其中 E_{cap}^* 表示复合体系在俘获位置处的激发能。对于球形核反应体系，由于它们的单粒子能级具有壳结构，在俘获位置处，弹靶核组成的复合体系非常不容易被激发，即 $E_{cap}^* \approx 0 \text{ MeV}$ ，此时 $V_B \approx E_{cap}$ 。

为了进一步研究在俘获位置处 E_{cap}^* 对俘获势垒高度的影响，我们引入激发阈能 ϵ_{th} 这个物理量，它表示的是反应体系最低激发态的能量[148]。普遍来说，球形核体系的激发阈能 ϵ_{th} 大于形变核体系的激发阈能 ϵ_{th} 。考虑到反应体系在弹靶核接触之前的激发能非常小[90]，其上限为入射能量 $E_{c.m.}$ 和反应 Q 值之和。因此，我们将俘获位置处的激发能定义为

$$E_{cap}^* \approx c(E_{cap} + Q) - \epsilon_{th}. \quad (3.9)$$

式中，系数 c 设定为 0.052， $Q = m_1 + m_2 - M_c$ ， m_1 、 m_2 和 M_c 分别为弹核、靶核及复合核的质量。激发阈能 ϵ_{th} 实验数据取自网站[148]。当弹靶核都是双幻核的反应体系中，通常 $c(E_{cap} + Q) - \epsilon_{th} < 0$ ，此时将 $E_{cap}^* = 0$ ，与前面所述保持一致。

利用上一节计算的俘获阈能，根据式 (3.7) 和 (3.9)，我们计算了这 144 组反应体系的俘获势垒高度值。图 9 给出的是俘获势垒高度 V_B 与实验值的绝对偏差，其中蓝色实心圆和红色空心圆分别表示 TDHF 模型和 Bass 势的计算结果，误差棒表示在拟合测量截面时提取的势垒高度的不确定性。通过比较绝对偏差，可以比较不同模型之间计算结

果的绝对差异，评价模型对于描述某些核区的优劣程度。可以看到，TDHF 模型的计算结果在较小俘获势垒（轻体系）区域要明显好于 Bass 势计算的结果。而对于一些较大俘获势垒（重核区域）的熔合体系，如 $^{58,64}\text{Ni}+^{112-124}\text{Sn}$ 的体系，TDHF 模型和 Bass 势的计算结果都存在比较大的偏差，这可能是由于提取俘获势垒高度实验值存在较大的不确定性导致的。

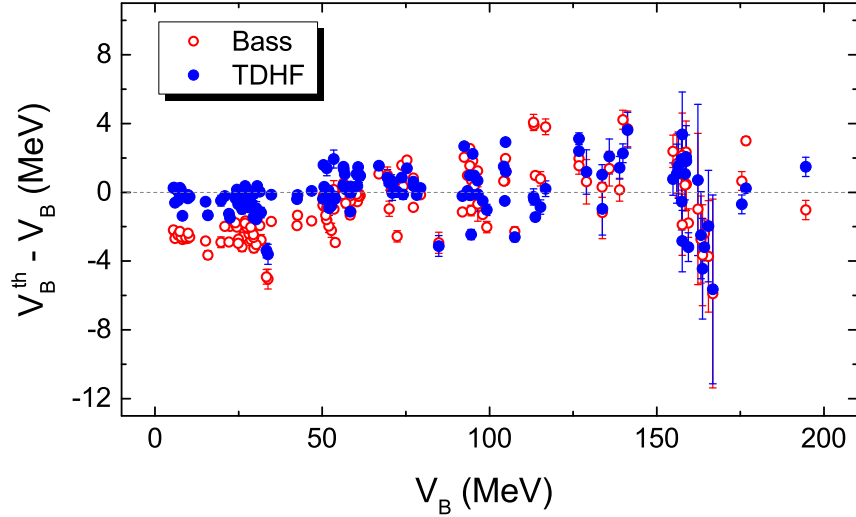


图 10 利用 TDHF 模型 (蓝色实线圆) 和 Bass 势 (红色空心圆) 计算 144 个近球形体系的俘获势垒高度与实验数据[131] 的绝对偏差。

此外，在表 1 中，我们列出了利用 TDHF 模型计算的这 144 组反应体系的俘获势垒高度值 V_B 与实验值的均方根偏差。同时，为了便于比较，该表还包含了六个常用的唯象模型 (Prox 势[149]、ETF4 势[150]、Bass 势[151]、BW91 势[152]、MWS 势[153] 和 CW76 势[154]) 的计算结果与实验值的均方根偏差。这些唯象核势模型将在 4.1.2.1 节中详细叙述。从表 1 中可以看出，TDHF 模型计算的俘获阈能与实验值的均方根偏差是最小的，仅为 1.43 MeV，优于其他所有唯象核势模型。同时，我们还注意到，在计算中考虑 E_{cap}^* 的影响，俘获势垒高度与实验的均方根偏差降低约 16%。在附录中，我们给出了这 144 组反应体系俘获势垒高度的实验值及其 TDHF 模型和六个唯象模型的理论计算值。

表 1 利用 TDHF 模型、Prox 势[149]、ETF4 势[150]、Bass 势[151]、BW91 势[152]、MWS 势[153] 和 CW76 势[154] 计算 144 个近球形体系的俘获势垒高度值与实验值[131] 的均方根偏差。

TDHF(MeV)	Prox(MeV)	ETF4(MeV)	Bass(MeV)	BW91(MeV)	MWS(MeV)	CW76(MeV)
1.43	2.09	4.15	2.11	1.66	1.53	2.24

3.1.3.3 俘获截面

理论上, 如果已知俘获势垒的参数信息, 可以通过 Siwek-Wilczyński(SW) 俘获截面公式[62] 计算俘获截面。SW 公式将势垒分布描述为一个单高斯分布, 具体形式为

$$\sigma_{\text{fus}} = \pi R_B^2 \frac{W}{\sqrt{2}E_{\text{c.m.}}} [X \text{erfc}(-X) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2)]. \quad (3.10)$$

式中 R_B 是势垒半径, $X = (E_{\text{c.m.}} - V)\sqrt{2}W$, V_B 和 W 分别为高斯分布的中心值和标准差。在实际计算中, R_B 、 V_B 和 W 这三个参数需要通过拟合实验数据确定。在本工作中, 我们通过 TDHF 模型确定 SW 公式中的参数。其中, V_B 由式 (3.8) 确定, 利用密度冻结近似确定 R_B , 高斯分布的标准差 W 则与反应 Q 值相关。

在双幻核参与反应的体系中, 如利用 TDHF 模型对 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的研究表明, 考虑动力学效应得到俘获位垒高度比密度冻结近似低约为 2 MeV[155]。此外, 由于量子隧穿机制, 能量低于熔合势垒也有几率穿过势垒发生俘获, 使得俘获位垒有 2-3 MeV 的分布宽度。因此, 我们将稳定双幻核参与反应体系的 W 参数设定为 2 MeV。而对于近球形核参与反应的体系, 情况就相对复杂一些。如上一节所述, 形变核在反应过程中容易被激发, 入射能量有一部分要贡献给激发能而不是用来克服势垒。相较于双幻体系, 近球形体系俘获位垒高度比密度冻结近似降低的值要更大一些。同时, 由于形变核在反应过程中容易被激发并产生较高的激发能, 这种激发可能导致如动力学形变与核子转移等效应增强, 从而进一步降低俘获位垒的高度。为了充分考虑反应体系在俘获位置处的激发能及相关的能量耗散效应, 在近球形核参与反应的体系中, 我们将 W 参数值的大小定义为 $c(E_{\text{cap}} + Q)$ 。Wolski 等人也指出, 在比较各种熔合数据时, 应考虑 Q 值效应[156]。

在表 2 中给出了 7 个反应体系 ($^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 、 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 和 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$) 在 SW 公式中的参数值, 这些参数是通过 TDHF 模型确定的。我们将 MWS 势[153] 计算的势垒高度值也列在此表中, 以便作比较。可以发现, TDHF 模型计算的势垒高度与 MWS 势计算的势垒高度值很接近, 它们之间的相对偏差小于 2%。

图 11 中给出了 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ 反应体系的熔合激发函数。红色实线表示 SW 公式计算的结果, 蓝色虚线是 MWS 势[153] 结合经验势垒分布 (双高斯分布[47]) 计算的结果, 黑色实心点和绿色空心点表示实验数据。其中, (a)

表 2 在七个反应体系 (包括 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 、 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 和 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$) 中, 基于 TDHF 模型确定的势垒参数 (V_B 、 W 、 R_B)、反应 Q 值及 MWS 势[153] 计算的势垒高度值 V_B^{MWS} 。

Reaction	V_B (MeV)	W (MeV)	R_B (fm)	Q (MeV)	V_B^{MWS} (MeV)
$^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$	51.95	2	10.2	4.56	52.43
$^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$	74.65	2	11.6	-46.48	74.43
$^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$	97.08	2.10	10.7	-57.02	97.85
$^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$	95.06	2.87	11.0	-41.09	97.14
$^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$	70.54	2.73	10.3	-19.28	69.82
$^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$	114.02	3.22	11.5	-52.13	115.71
$^{132}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$	112.66	1.92	11.8	-75.78	112.73

中的实验数据取自[143-144], (b) 中的实验数据取自[58,157], (c) 和 (d) 中的实验数据取自[158]。可以看出, 考虑到实验数据的不确定性, SW 公式能够很好地再现这四个体系的实验数据。需要指出的是, 在密度冻结近似下, 考虑泡利阻塞效应与不考虑泡利阻塞效应对势垒半径并无明显影响[92]。同时, 我们发现, 在 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 与 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系中, 通过密度冻结近似方法计算得到的势垒半径分别为 10.2 fm 和 11.6 fm, 这些值比使用 MWS 势计算的势垒半径大约大 0.6 fm。因此, 当入射能量在高于俘获位垒能量时, SW 公式计算的熔合截面比使用 MWS 势预测的更大。在 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 与 $^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ 反应体系中, 我们发现, $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 反应体系的 Q 值比 $^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ 小约 16 MeV, 这可能是因为丰中子反应体系的激发能较大, 产生了较大的能量耗散。从表 2 中可以看到, $^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ 的 W 值明显更大一些。SW 公式的计算结果能同时再现这两个体系的实验数据。同时, SW 公式计算的结果明显优于 MWS 势结合势垒分布所得的结果, 这是因为 MWS 势结合经验势垒分布得到的最可几俘获势垒高度值比实验提取值高出约 1.5 MeV, 从而导致其计算的垒下截面数据偏低, 与实验数据存在较大差异。

为了验证 SW 公式对于描述形变原子核参与反应的体系的有效性, 图 12 给出了 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应体系的熔合激发函数的理论计算值与实验值的比较。红色实线表示 SW 公式计算的结果, 蓝色虚线是 MWS 势结合经验势垒分布 (双高斯分布) 计算的结果, 绿色空心点表示实验数据, 取自[159]。根据式 (3.8) 可以计算得到 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应体系的俘获势垒高度 $V_B=70.55$ MeV 和势垒分布宽度 $W=2.73$ MeV。势垒半径 $R_B=10.3$ fm, 其权重计算方法与式 (3.6) 类似。可以看到, SW 公式的理论计算值能很好符合实验数据。需要指出的是, CCFULL 程序对于 ^{96}Zr 在垒下入射能量下的理论描述显著低于实验数据, 该程序在计算中包含了双中子转移道与非弹性激发之间的耦合。作者认为, 包含多

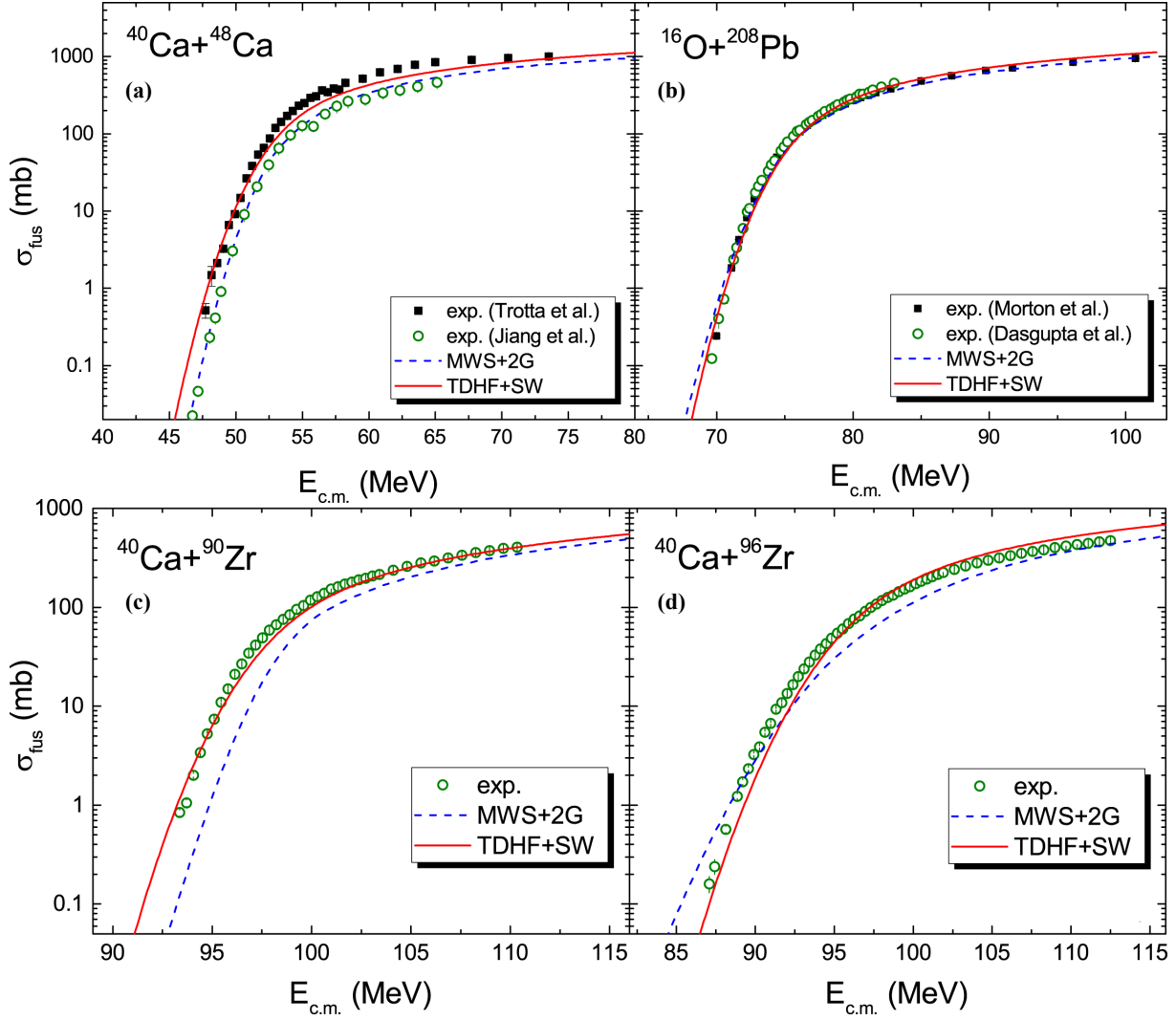


图 11 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 及 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 反应的熔合激发函数的理论计算值与实验值的比较。其中，红色实线表示 TDHF+SW 公式的计算结果，蓝色虚线为 MWS 势的计算结果，散点为实验数据 ((a) 取自[143-144]，(b) 取自[58,157]，(c) 和 (d) 取自[158])。

中子转移道是重要的[159]。在 TDHF 计算中, 不仅静态和动态的形变效应被自洽地考虑在内, 而且由于俘获位置处的能量激发导致的多中子转移也同样得到了自洽的处理。

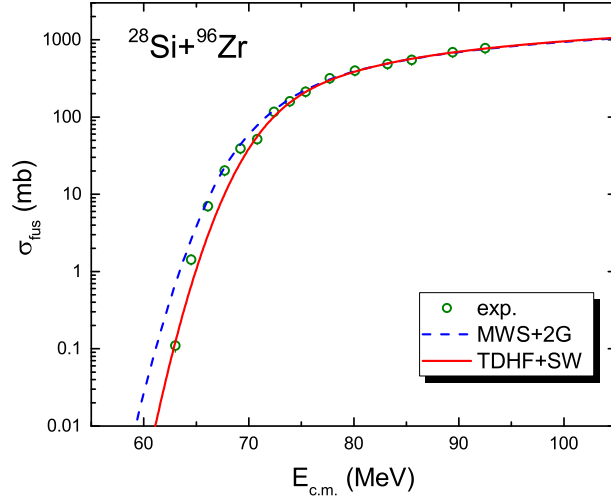


图 12 同图11, 但针对 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 反应, 实验数据取自[159]。

为了进一步研究 SW 公式对于极端丰中子核参与反应的体系的有效性, 我们研究了 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 反应体系。利用 DC-TDHF 模型对这两个体系的研究表明, 同位旋对这两个体系的熔合势垒的影响显著不同[127]。图 13 给出了 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 反应体系的熔合激发函数的理论计算值与实验值的比较。红色实线表示 SW 公式计算的结果, 蓝色虚线是 MWS 势结合经验势垒分布 (双高斯分布) 计算的结果, 黑色实心点和绿色空心点表示实验数据, 取自[160]。对于 $^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ 反应, 当入射能量 $E_{\text{c.m.}}$ 等于俘获势垒 V_B 时, 复合核的激发能高达约 62 MeV, 这很可能导致俘获过程中的多核子转移, 从而加宽势垒分布的宽度。根据 TDHF 模型计算的俘获势垒高度 $V_B=114.38$ MeV 及势垒分布宽度 $W=3.24$ MeV。而对于 $^{132}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系, 由于体系多了 8 个中子, 在入射能量 $E_{\text{c.m.}}$ 等于俘获势垒 V_B 条件下, 复合核激发能仅为 37 MeV, 比 $^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ 反应体系低 27 MeV。这是因为 ^{48}Ca 是双幻核, 具有较强的壳效应。这意味着, 相较于 $^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ 反应体系, $^{132}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系的动力学形变和核子转移更难发生。此时, $^{132}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系的势垒分布宽度 W 为 1.92 MeV, 其结果明显比 $^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ 反应体系的势垒分布宽度偏小。同时, 我们可以看到, SW 公式能很好再现这两个体系的实验数据。 $^{132}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$ 反应体系在 $E_{\text{c.m.}} \approx 110$ MeV 入射能量下的俘获截面值比 $^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ 反应体系低一个数量级, TDHF 模型很好再现了这一结果。在[47]中也观察到了, 由于丰中子效应和中子闭壳效应导致的垒下熔合增强与抑制效应之间的竞争。

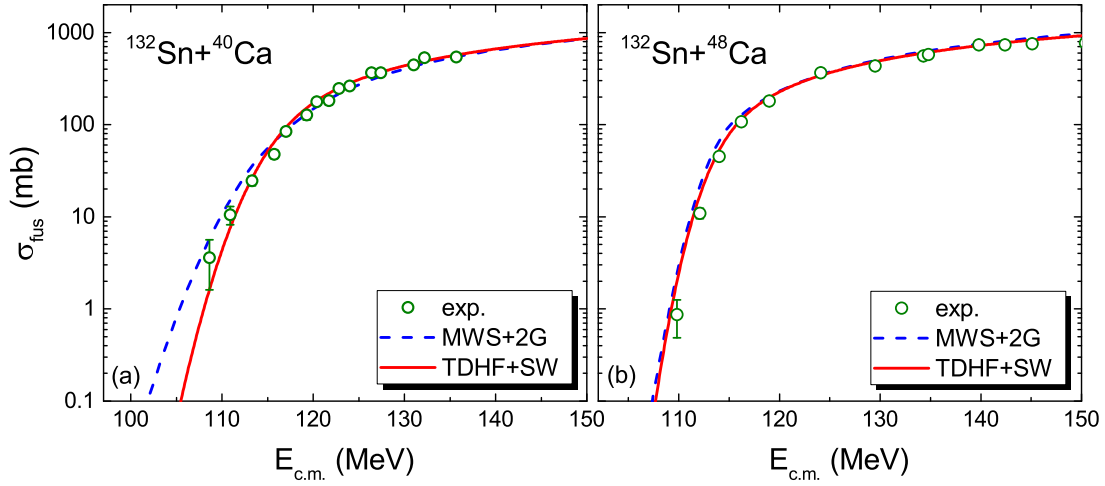


图 13 同图11，但针对 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 反应，(a) 和 (b) 中的实验数据取自[160]。

3.1.4 小结

我们基于 TDHF 模型系统地研究了 144 个近球形核反应体系的俘获阈能 E_{cap} 。研究发现，对于双幻数核参与的熔合反应，理论计算的 E_{cap} 与从实验测量的熔合激发函数中提取的势垒高度值相吻合。而对于近球形核参与的熔合反应，与双幻核相比，由于这些核的激发阈能相对较低，在俘获位置处，需要约 1 MeV 的激发能来更好地再现实验数据。对于 144 个熔合反应体系，从 TDHF 模型计算势垒高度值与实验提取的势垒高度值之间的均方根偏差为 1.43 MeV，小于其它六个唯象核势模型的计算结果。需要指出的是，密度泛函参数的不确定性可能导致势垒高度产生约百分之几的误差[161]。结合由 TDHF 模型计算确定的三个参数的 SW 公式，我们进一步研究了熔合合激发函数。对于七个熔合反应体系 ($^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 和 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$)，SW 公式可以很好地再现它们的实验数据。同时发现，熔合体系的反应 Q 值会影响垒下截面。相对较大的反应 Q 值会导致俘获位置的体系激发能较高，从而导致弹靶的动力学形变与核子转移更容易，进而引起垒下截面的增强。

3.2 超重体系俘获势阱的系统研究

3.2.1 引言

在超重核反应过程中, 伴随着深度非弹、熔合-裂变与准裂变反应的三种机制的相互竞争, 最终反应产物包含深度非弹、熔合-裂变和准裂变三种反应的成分。它们的特征(例如质量、角度和动能的相关分布)通常会重叠, 因此这三个过程通常不能逐个事件进行分离[124]。为了系统性探究这种竞争关系, 实验上测量了多个反应体系的质量数-能量分布[162-164] 和质量数-角度分布 [73,165-166]。理论上, 通常将核反应过程分为三个步骤(俘获、熔合和存活), 其中熔合过程的熔合概率 P_{cn} 是最不清楚的。 P_{cn} 的值可以通过实验测量 $A_{CN} \pm 20$ u 范围内的碎片进行估算, 这是因为根据液滴模型, 对于 $Z \approx 108-114$ 的系统, 复合核裂变碎片的质量数分布呈对称高斯形状分布, 标准差约为 20 u。因此, 需要尽可能清晰地从实验测量的质量数-能量分布中区分俘获事件(类裂变事件)、准弹性和深度非弹反应碎片。

对于中等质量的熔合-裂变反应, 由于准裂变过程产生的碎片贡献可忽略不计, 因此可以非常清晰地将类裂变事件(熔合-裂变+准裂变)的碎片从质量数-总动能(M-TKE)分布中区分出来。然而, 对于那些涉及俘获势阱非常浅的反应, 如 $^{86}\text{Kr} + ^{198}\text{Pt}$, 很难明确区分准裂变和深度非弹反应事件产生的碎片。在这两个反应过程中, 复合系统都分离成两个主要碎片, 而不形成复合核, 并以较大的能量耗散和质量转移为特征。例如, 文献分析了四个具有 $Z=114$ 的复合系统的 M-TKE 分布[167]。我们注意到, 对于 $^{86}\text{Kr} + ^{198}\text{Pt}$ 反应, 在 M-TKE 分布中作为俘获事件被标记的红色区域与其他三个系统截然不同。此外, 即使是对于相同的 $^{40}\text{Ca} + ^{244}\text{Pu}$ 反应, 文献[168] 和[167] 中准裂变和深度非弹事件的标记区域也存在显著差异。

因此, 有必要提出一种统一的方法来区分类裂变事件、准弹反应事件和深度非弹反应事件, 从而能够精确确定俘获截面。此外, 根据双核(DNS)模型[169], 超重核的熔合过程被描述为双核系统的演化过程, 其中核子从轻核转移到重核, 初始的双核系统位于俘获势阱最底部处, 在这里碎片之间发生能量转移和耗散。俘获势阱深度(也被定义为准裂变势垒高度[170])对这一过程有显著影响。对于轻质量和中等质量的熔合反应, B_{qf} 的值足够高, 使得在接近库仑势垒的入射能量下, 准裂变几乎很难发生。然而当两个大质量核发生反应时, 如果俘获势阱深度消失, 俘获过程可能会变得非常困难。目前,

熔合势垒高度的分布可以通过测量的熔合激发函数[171] 或背角准弹性散射激发函数实验[172] 数据中获得。因此，如何从测量的重核系统的 M-TKE 分布中提取俘获势阱深度是一个非常有趣的问题。在这本工作中，我们提出了一个统一的方法从 M-TKE 分布中区分裂变事件、准弹性事件和深度非弹事件。同时，我们还系统研究了深度非弹事件的相对产额与俘获势阱深度之间的关系。

3.2.2 数值细节

在本工作中，俘获势阱深度 B_{qf} 通过 Skyrme 能量密度泛函结合密度冻结近似计算得到，俘获截面 σ_{cap} 与深度非弹反应截面 σ_{DIC} 值则通过 ImQMD 模型计算得到。

在 Skyrme 能量密度泛函的计算中，系统的能量密度泛函采用 ETF 近似，并将动能部分和自旋轨道部分的泛函形式展开至 2 阶，使用 Skyrme 相互作用参数 SKM*[173]。

在 ImQMD 模型计算中，采用 IQ3a[174] 参数，如下表所示，

表 3 ImQMD 模型参数 IQ3a[174]

α (MeV)	β (MeV)	γ	g_{sur} (MeVfm ²)	g_{τ} MeV	η	C_s (MeV)	κ_s (fm ²)	ρ_0 (fm ⁻³)	σ_0 (fm)	σ_1 (fm)
-207	138	7/6	16.6	14	5/3	34	0.4	0.165	0.94	0.020

我们模拟了反应在不同碰撞参数下的碰撞过程，具体取值为 $b=0-10$ fm， $\Delta b=1$ fm。每个碰撞参数下模拟了 10 万个事件，以获取足够多的统计信息。

3.2.3 计算结果与讨论

3.2.3.1 M-TKE 分布

前面提到，可以通过实验测量质量数为 $A_{\text{CN}} \pm 20$ u 范围内的裂变碎片估算 P_{CN} 的值，这就要求从 M-TKE 分布中精确鉴别在类裂变事件、准弹性和深度非弹反应事件中产生的碎片。目前实验上对它们的鉴别存在模糊性，尚没有统一的标准。因此，我们提出了两个经验公式对它们进行统一区分。下面将详细讨论，这两个公式提出的物理基础以及它们与实验数据的符合情况。

在熔合-裂变反应中，复合核通常具有较高的激发能，以轻粒子发射、 γ 衰变、对称或不对称两体裂变等方式退激发。假如系统完全以两体裂变的方式退激发，此时裂变后

体系的总动能 TKE 为最大值。根据能量守恒条件，体系的总动能表示为

$$\text{TKE} = E_{\text{CN}} + E_{\text{CN}}^* - E_1 - E_2. \quad (3.11)$$

式中， E_{CN} ， E_{CN}^* 分别表示复合体系的能量和激发能， E_1 ， E_2 分别表示裂变碎片 1 和 2 的能量。通过式 (3.11) 可以发现，在对称裂变反应体系中，TKE 的上限值为 $Q_s + E_{\text{CN}}^*$ 。其中 $Q_s = E(A_1 + A_2, Z_1 + Z_2) - 2E(A_m, Z_m)$ ， $A_m = (A_1 + A_2)/2$ ， $Z_m = (Z_1 + Z_2)/2$ ， A_1 ， A_2 ， Z_1 ， Z_2 分别为裂变碎片 1 和 2 的质量数与电荷数。对于未知质量区域的原子核的基态能量可以用 WS4 质量公式[175] 计算。根据这个上限值，我们用一个倒抛物线的函数 F_1 来描述类裂变反应碎片的上限值，

$$F_1 = (Q_s + E_{\text{CN}}^*) - (Q_s + E_{\text{CN}}^* - Q_0) \frac{(A - A_m)^2}{(A_1 - A_m)^2}. \quad (3.12)$$

式中， Q_0 表示 $E_{\text{CN}} - E(A_1, Z_1) - E(A_2, Z_2)$ 。这个函数可以用来区分准弹反应碎片与深度非弹反应碎片。

同时，我们用函数 F_2 来区分深度非弹反应碎片与类裂变碎片，

$$F_2 = \begin{cases} E_{\text{c.m.}}(1 - |A - A_1|/80) : A_1 \leq A < A_m \\ E_{\text{c.m.}}(1 - |A - A_2|/80) : A_m \leq A \leq A_2 \end{cases}. \quad (3.13)$$

在实际计算中，我们只考虑 $E_{\text{c.m.}}/2 \leq F_2 \leq E_{\text{c.m.}}$ 。文献[176] 中对 $^{208}\text{Pb} + ^{110}\text{Pd}$ 反应体系在入射能量为 Bass 垒附近的研究发现，当体系总动能损失超过 80 MeV 时，每交换一个质子所损失的能量大约为 3 MeV。式 (3.13) 所使用的系数 ($E_{\text{c.m.}}/80 \approx 3 \pm 1$) 与这个结论一致。

利用函数 F_1 和 F_2 可以将实验测量的 M-TKE 分布划分为三部分。图 14 中给出了 $^{36}\text{S} + ^{238}\text{U}$ 和 $^{40}\text{Ca} + ^{144}\text{Sm}$ 的在入射能量为 Bass 垒附近的 M-TKE 分布的实验值。(a) 中黑色实线与 (b) 中红色实线分别在文献[176] 与文献中[177] 用来区分类裂变碎片，粉色圆圈与蓝色方框分别表示的是函数 F_1 和 F_2 计算的结果。可以看到，几乎所有类裂变碎片位于 $F_2 < \text{TKE} \leq F_1$ 区域，准弹反应碎片位于 F_1 函数值与横坐标围成的区域之外。图 15 分别给出了 $^{48}\text{Ca} + ^{238}\text{U}$ 、 $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$ 、 $^{52}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$ 和 $^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U}$ 反应体系的

M-TKE 分布, 实验数据取自[164,168]。可以看到, 在这四个体系中, 类裂变碎片均可以通过 $F_2 < \text{TKE} \leq F_1$ 区域进行区分。在 $^{52}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$ 与 $^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U}$ 反应体系中, 采用式 F_2 计算的下限值与文献[164]中给出的值基本吻合。在 $^{48}\text{Ca} + ^{238}\text{U}$ 反应中, 位于红色方框外面且位于 $100 < \text{TKE} < 150\text{MeV}$ 与 $A_m \pm 50$ 区域内的类裂变碎片也可以通过函数 F_2 进行区分。

此外, 可以从图 15 中发现, 存在比较大的能量耗散但较小的质量转移的反应, 其碎片位于 $\text{TKE} \leq F_1$ 与 $\text{TKE} \leq F_2$ 所围成的区域内。作者在研究 $^{208}\text{Pb} + ^{94}\text{Zr}$ 、 $^{208}\text{Pb} + ^{110}\text{Pd}$ 、 $^{208}\text{Pb} + ^{148}\text{Sm}$ 和 $^{208}\text{Pb} + ^{170}\text{Er}$ 等体系时, 发现当入射能量为库仑位垒时, 转移数十个核子需要耗散比较大的能量 ($\sim 100\text{-}200\text{ MeV}$) [176]。因此, 在本工作中, 我们将位于 $\text{TKE} \leq F_1$ 与 $\text{TKE} \leq F_2$ 所围成区域内的碎片定义为深度非弹反应产生的碎片。

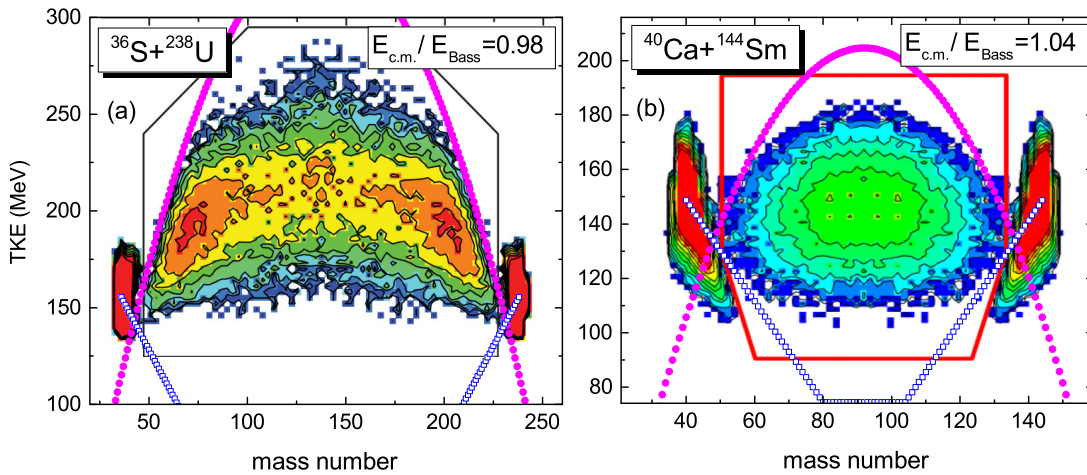


图 14 $^{36}\text{S} + ^{238}\text{U}$ 和 $^{40}\text{Ca} + ^{144}\text{Sm}$ 反应产物的 Mass-TKE 分布实验值。其中, (a) 中实验数据取自[176], (b) 取自[177], 粉色圆圈与蓝色方框分别是函数 F_1 与 F_2 计算的结果。

为了检验函数 F_2 区分准弹反应和深度非弹反应的有效性, 图 16 给出了 $^{58}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$ 与 $^{86}\text{Kr} + ^{208}\text{Pb}$ 反应体系的 M-TKE 分布, 实验数据取自[178], 图 17 分别给出了 $^{48}\text{Ca} + ^{244}\text{Pu}$ 、 $^{48}\text{Ti} + ^{238}\text{U}$ 、 $^{52}\text{Cr} + ^{232}\text{Th}$ 和 $^{86}\text{Kr} + ^{198}\text{Pt}$ 反应体系的 M-TKE 分布, 实验数据取自[167]。在 $^{58}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$ 反应中, 位于准弹性峰之间的反应产物的边界 (发生突变的位置) 相对明显。从这些反应体系中, 我们可以看出, 除了由 ^{86}Kr 诱发的两个反应中俘获势阱消失的情况 (将在下一小节讨论), 产物碎片产额突变的边界均可以通过 F_2 进行清晰地描述。通过深入分析反应碎片的 M-TKE 分布, 可以区分不同区域内产物碎片的产额, 从而更准确地分析俘获截面的系统性规律。

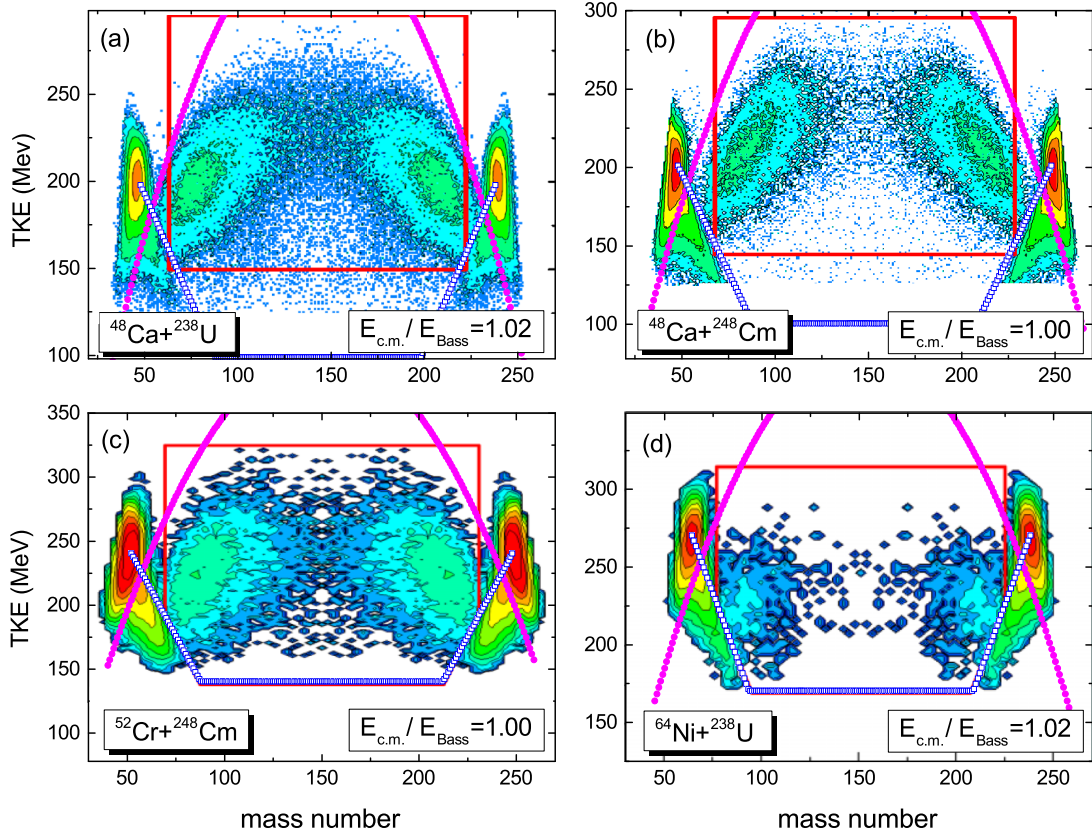


图 15 同图14，但针对 $^{48}\text{Ca}+^{238}\text{U}$ 、 $^{48}\text{Ca}+^{248}\text{Cm}$ 、 $^{52}\text{Cr}+^{248}\text{Cm}$ 和 $^{64}\text{Ni}+^{238}\text{U}$ ，实验数据取自[164,168]。

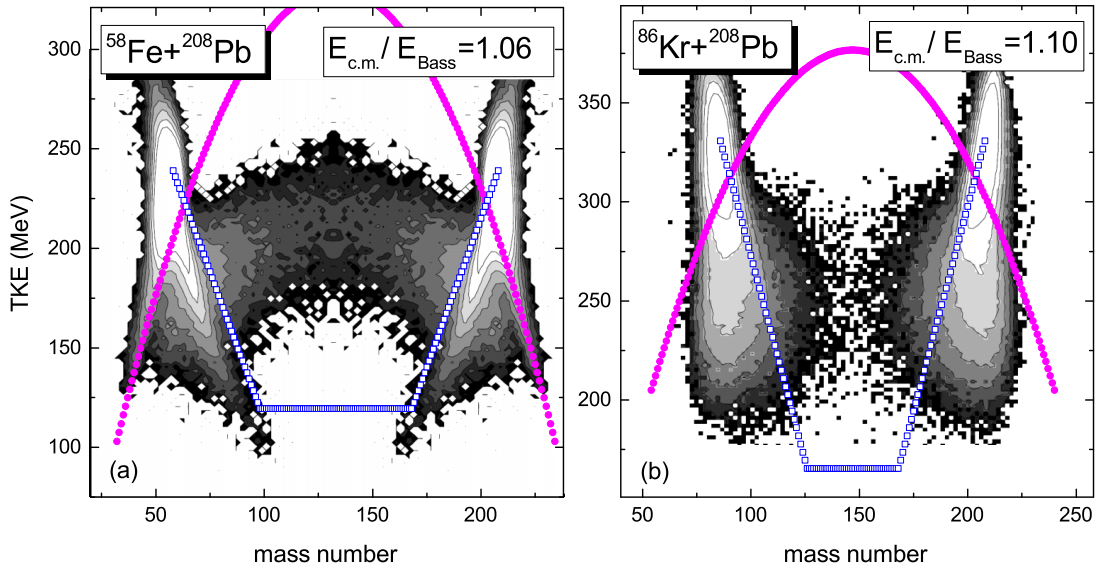


图 16 同图14，但针对 $^{58}\text{Fe}+^{208}\text{Pb}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ ，实验数据取自[178]。

3.2.3.2 俘获势阱

从图 14 与图 16 的对比可以发现， $^{58}\text{Fe}+^{208}\text{Pb}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ 这两个反应体系中，深度非弹反应碎片的产额在产物中的贡献显著增加。为了解释背后的物理机制，我们利用 Skyrme 能量密度泛函计算了上一节中所涉及到的 13 个反应体系的俘获势阱。根

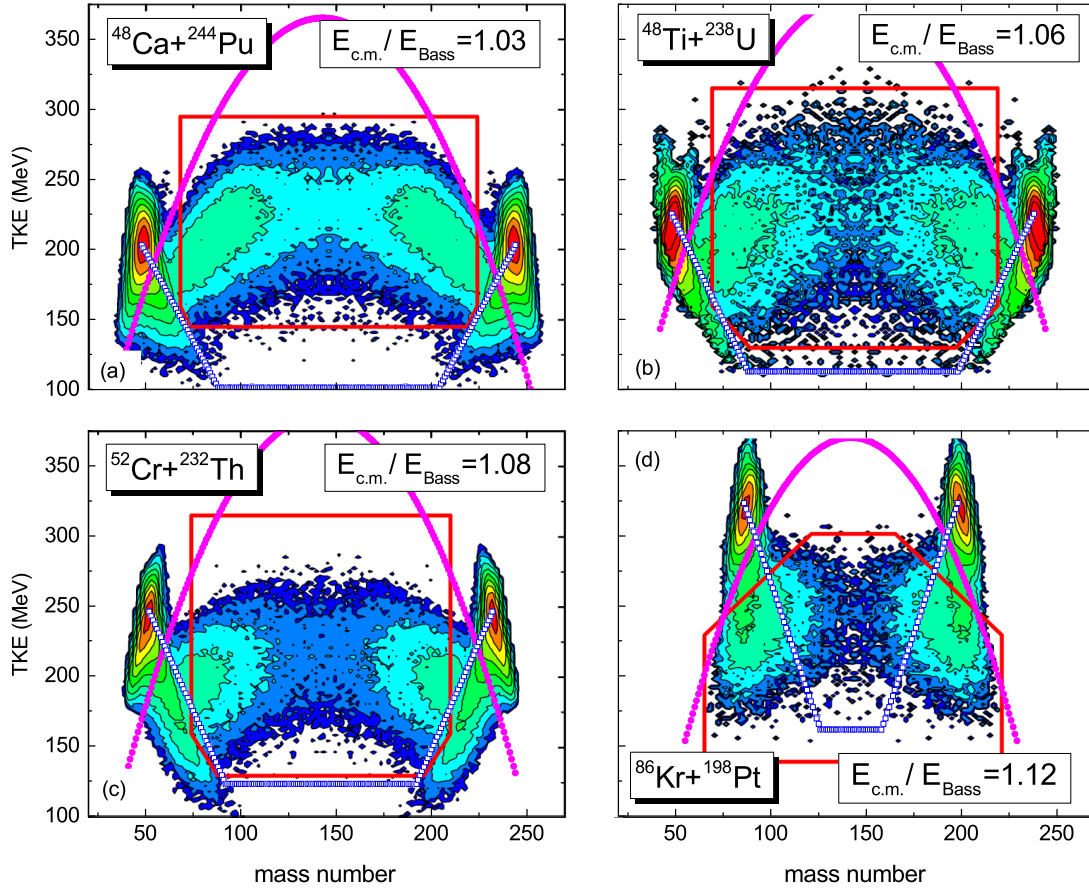


图 17 同图14，但针对 $^{48}\text{Ca}+^{244}\text{Pu}$ 、 $^{48}\text{Ti}+^{238}\text{U}$ 、 $^{52}\text{Cr}+^{232}\text{Th}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{198}\text{Pt}$ ，实验数据取自[167]。

据图3， $V(R)$ 在弹靶核接触点附近存在一个俘获“口袋”，这个“口袋”的深度 B_{qf} 被定义为俘获势阱深度 (也称为准裂变位垒高度)。表 4 列出了 13 个反应体系的 B_{qf} 值，同时也给出了 Bass 垒高 E_{Bass} [151]、反应 Q 值、有效裂变参数 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ [179]。其中 $(Z^2/A)_{\text{eff}} = 4Z_1Z_2/[A_1^{1/3}A_2^{1/3}(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})]$ 。

表 4 13 个反应体系的入射道属性：Bass 势[151] 垒高度 E_{Bass} 、反应 Q 值、俘获势阱深度 B_{qf} 和有效裂变参数 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 。

Reaction	E_{Bass} (MeV)	Q (MeV)	B_{qf} (MeV)	$(Z^2/A)_{\text{eff}}$
$^{36}\text{S} + ^{238}\text{U}$	158.5	-115.4	9.38	30.3
$^{40}\text{Ca} + ^{144}\text{Sm}$	143.2	-105.8	9.22	32.0
$^{48}\text{Ca} + ^{238}\text{U}$	193.8	-160.8	5.85	33.3
$^{48}\text{Ca} + ^{244}\text{Pu}$	197.3	-163.9	5.67	33.5
$^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$	201.0	-169.6	5.46	33.9
$^{48}\text{Ti} + ^{238}\text{U}$	213.8	-170.9	4.95	36.6
$^{58}\text{Fe} + ^{208}\text{Pb}$	226.1	-205.0	4.09	38.0
$^{52}\text{Cr} + ^{232}\text{Th}$	227.7	-187.4	4.12	38.2
$^{52}\text{Cr} + ^{248}\text{Cm}$	240.5	-204.0	3.35	39.3
$^{64}\text{Ni} + ^{208}\text{Pb}$	241.3	-224.3	2.89	39.1
$^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U}$	265.5	-238.6	1.85	40.8
$^{86}\text{Kr} + ^{198}\text{Pt}$	288.7	-280.6	0.66	42.6
$^{86}\text{Kr} + ^{208}\text{Pb}$	301.5	-302.9	0.26	43.7

图 18 给出了这些体系在不同 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 下的 B_{qf} 值。可以看到随着 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 增加, B_{qf} 系统性降低。普遍认为, 对于 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 大于 33 的体系, 不能忽略系统准裂变的影响。在 $^{36}\text{S}+^{238}\text{U}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{144}\text{Sm}$ 体系中, 俘获势阱深度大于 9 MeV, 对应的 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 小于 33, 意味着准裂变的影响可以忽略[180-181]。从图14中可以发现, 准弹反应与深度非弹反应在重叠区域的碎片产额非常少, 这与俘获深度计算的得出的结论是一致的。从图 14 至图 17 中可以看出, 随着 B_{qf} 减小, 产物中类裂变碎片产额系统性降低。特别是在 $^{64}\text{Ni}+^{238}\text{U}$ 体系的反应产物中的类裂变碎片产额明显比 $^{52}\text{Cr}+^{248}\text{Cm}$ 体系低, 这是因为 B_{qf} 比后者小约 1.5MeV。对于 $^{86}\text{Kr}+^{198}\text{Pt}$ 与 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ 这个两个体系中, 它们反应产物中深度非弹反应产物的产额相比类裂变产物的产额则要大很多, 这是由于它们的俘获势阱深度非常小, 接近于 0。这预示着深度非弹性反应碎片的产额对俘获势阱深度的非常敏感。

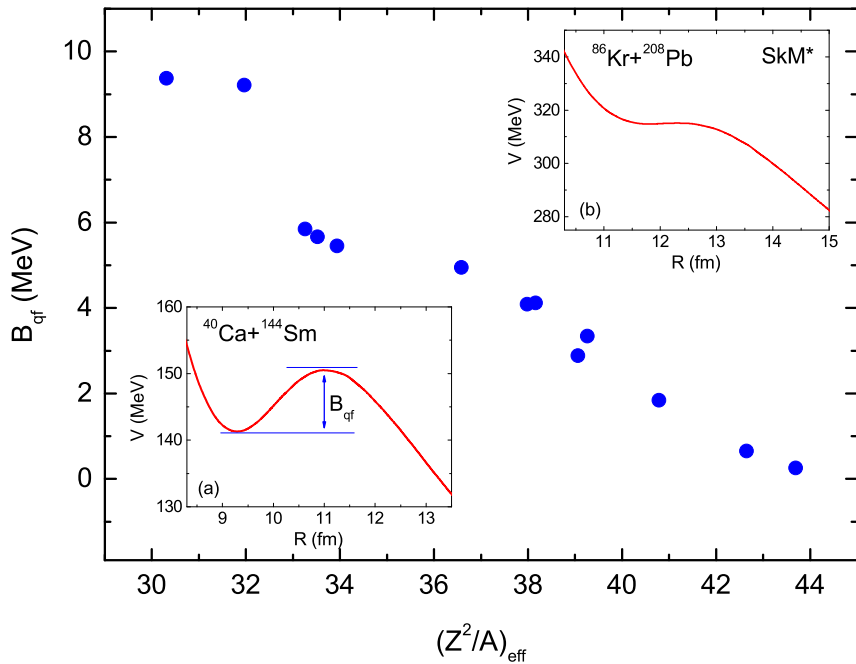


图 18 俘获势阱深度 B_{qf} 与有效裂变参数 $(Z^2/A)_{\text{eff}}$ 的关系。

此外, 我们利用 ImQMD 模型分别计算了这 13 个反应体系在入射能量为 B_{ass} 垒高值的俘获截面 σ_{cap} 与深度非弹反应截面 σ_{DIC} 值, 具体数值细节在 3.2.2 节中给出。TDHF 计算表明, 当入射能量为 $0.94E_{\text{bass}}$ 时, ^{58}Ni 与 ^{124}Sn 在中心碰撞下发生的准弹反应, 弹靶核的接触时间为 150 fm/c[140]。在 ImQMD 计算中, 当入射能量为 $1.1E_{\text{bass}}$ 时, $^{58}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ 反应准弹事件的接触时间小于 200 fm/c[182], 与 TDHF 模型计算的时间尺度基本一致。因此, 在计算中, 我们定义弹靶核接触时间 $t_{\text{con}} < 200 \text{ fm/c}$ 的事件

为准弹反应事件。图 19 中给出了 $^{64}\text{Ni}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系在入射能量为 Bass 垒高值和在中心碰撞条件下的 M-TKE 分布，它是基于 ImQMD 模型计算得到的。可以发现，在 $200 < t < 600 \text{ fm/c}$ 区域体系主要发生的深度非弹反应，表明类裂变事件主要发生在 $t > 600 \text{ fm/c}$ 区域。通常认为准裂变的时间尺度为几个 zs ($1 \text{ zs} = 10^{-21} \text{ s}$) [124]，例如 $^{64}\text{Ni}+^{238}\text{U}$ [137] 和 $^{86}\text{Kr}+^{197}\text{U}$ [138] 这两个体系从质量数-角分布中提取的值为 3 zs。因此，在实际计算中，我们认为，接触时间 $t_{\text{con}} \geq 600 \text{ fm/c}$ 的事件为俘获事件，接触时间为 $200 \leq t_{\text{con}} \leq 600 \text{ fm/c}$ 的事件为深度非弹反应事件，是合理的。

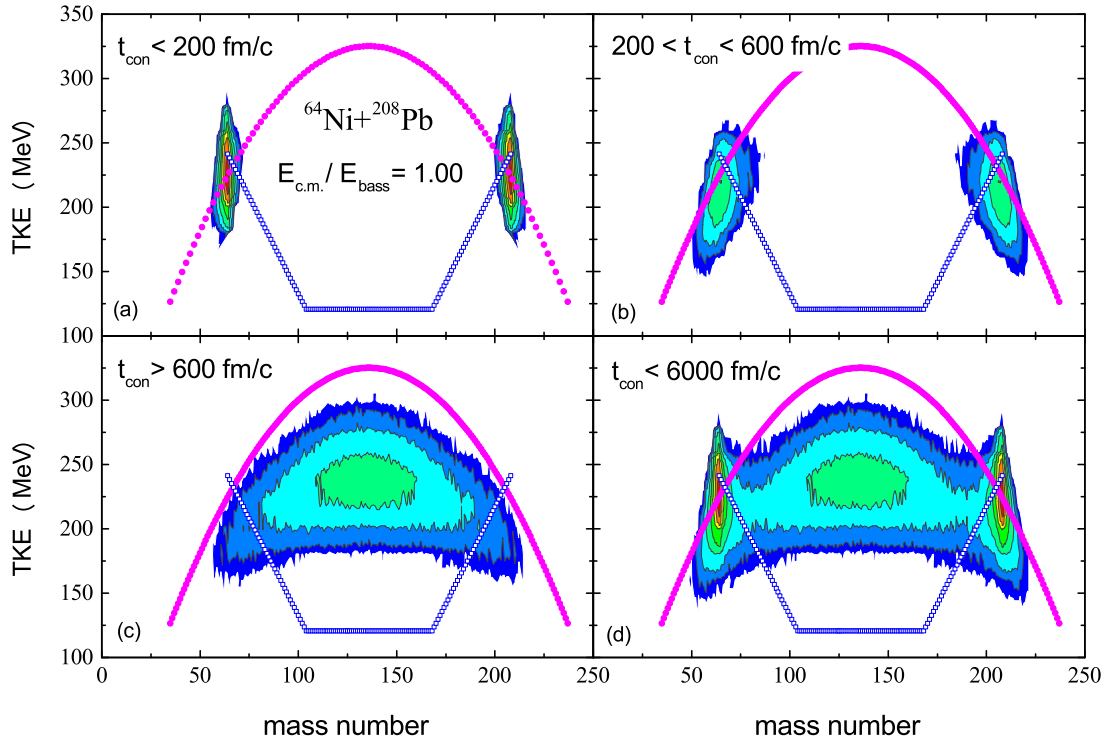


图 19 利用 ImQMD 模型计算 $^{64}\text{Ni}+^{208}\text{Pb}$ 在不同接触时间下的 M-TKE 分布

在 ImQMD 模型中，俘获截面 σ_{cap} 可以表示为

$$\sigma_{\text{cap}}(E_{\text{c.m.}}) = 2\pi \int b g_{\text{cap}} db \simeq 2\pi \sum b g_{\text{cap}} \Delta b. \quad (3.14)$$

式中， g_{cap} 为反应中发生俘获事件的概率，在本工作中，即接触时间 $t_{\text{con}} > 600 \text{ fm/c}$ 的事件的产生概率。同理，可以根据接触时间 t 计算深度非弹反应截面 σ_{DIC} 。

为了进一步研究深度非弹反应，我们定义接触截面 σ_{T} :

$$\sigma_{\text{T}} = \sigma_{\text{cap}} + \sigma_{\text{DIC}}. \quad (3.15)$$

图 20 给出了 $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 随俘获势阱深度 B_{qf} 的变化。可以看到, $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 的值随着俘获势阱深度增加而线性增大。在 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ 体系中, $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 的计算值为 0.39, 表明深度非弹反应事件发生的几率大于俘获事件的几率, 与图 16 中实验结果相符合。而对于 $^{40}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$ 来说, $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 值为 0.86, 对应 B_{qf} 的值为 9.22 MeV, 这意味着深度非弹反应的事件要比俘获事件要小得多。从图 20 中趋势的趋势来看, 随着俘获势阱深度 B_{qf} 增大, $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 趋近与 1。这就意味着, 对于轻体系来说, 由于有较大的 B_{qf} 值, 它们在库仑位垒附近的反应中, 熔合截面与俘获截面基本相等, 准裂变和深度非弹反应的贡献几乎可以忽略。综上, 我们的研究表明, 在熔合-裂变反应中, $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 的值是对俘获势阱深度非常敏感。

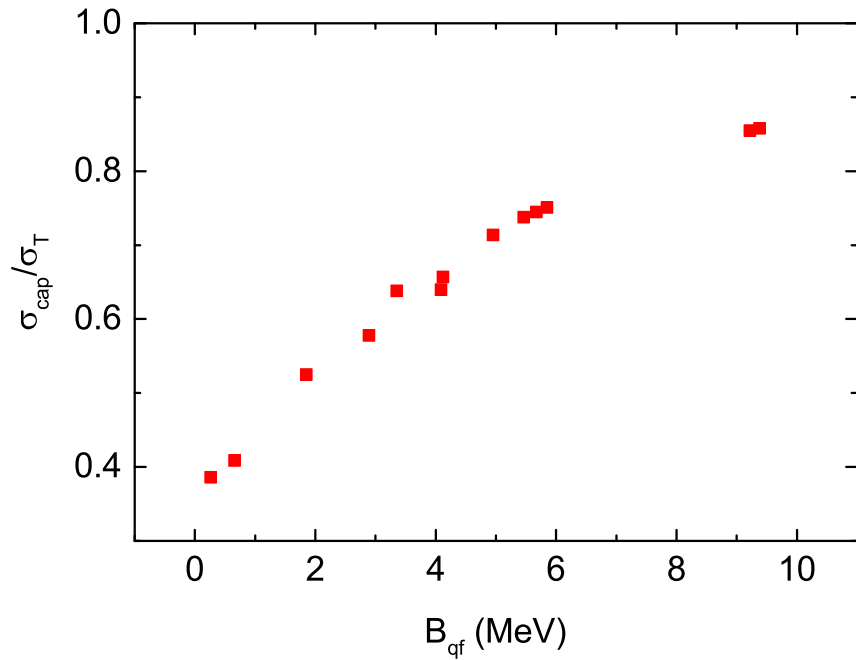


图 20 俘获截面 σ_{cap} 与接触截面 σ_{T} 的比值随俘获势阱深度的变化。

3.2.4 小结

目前实验上对熔合-裂变、准裂变、深度非弹反应事件的鉴别存在模糊性, 尚没有建立统一的标准。因此, 我们提出了两个经验公式 F_1 和 F_2 对它们中类裂变事件 (熔合-裂变 + 准裂变) 和深度非弹反应事件进行了统一区分。对 13 个熔合-裂变反应体系的研究表明, 我们提出的这两个公式能很好地从 M-TKE 分布中区分类裂变事件、准弹和深度非弹反应事件。同时, 我们还注意到深度非弹反应事件在反应中的占比随俘获势阱深度 B_{qf} 的减小而快速升高。对于 $^{36}\text{S}+^{238}\text{U}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{144}\text{Sm}$, 俘获势阱深度 B_{qf} 大于 9 MeV, 此时对应深度非弹反应产物的产额相对较少, 而在 $^{86}\text{Kr}+^{198}\text{Pt}$ 和 $^{86}\text{Kr}+^{208}\text{Pb}$ 中, 深度非弹反应产物的产额远远大于类裂变碎片, 这是因为俘获势阱几乎消失。在 ImQMD 模型计

算中，我们定义弹靶核接触时间小于 200 fm/c 为准弹反应事件，接触时间大于 600 fm/c 为深度非弹反应事件。研究发现俘获截面与接触截面之比 $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 随着俘获袋深度 B_{qf} 值的增加而系统地增加。这似乎表明 $\sigma_{\text{cap}}/\sigma_{\text{T}}$ 可以用来探测熔合势垒的俘获势阱深度。

第四章 重离子核-核相互作用势的微观动力学研究

核-核相互作用势不仅可以用来研究熔合势垒，因为熔合势垒仅描述了核-核相互作用势的势能曲线上的一个特定“突起”区域，还可以用来研究核-核相互作用势能随距离的变化，从而可以更全面地理解熔合过程的动力学行为。近年来，利用 TDHF 模型研究熔合反应及其核-核相互作用势取得了显著的成就。

由于 TDHF 模型采用了平均场近似，体系的状态波函数被描述为单粒子波函数的组合，因此它无法直接描述量子隧穿效应。为了克服这一限制，普遍的方法是基于一维势垒穿透理论计算穿透概率，并据此计算熔合激发函数。熔合激发函数在实验上可以直接测量，因此理论计算结果可以直接与实验数据进行对比。此外，还可以通过实验测量的熔合激发函数提取的熔合势垒信息，如高度与半径等，将理论计算的结果与实验值进行对比。

本章在 TDHF 理论的框架下，对多个反应体系的核-核相互作用势进行了微观动力学研究。4.1 节给出对核-核相互作用势的微观动力学描述；4.2 节给出对熔合激发函数的理论计算；4.3 节给出 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中形变效应的研究；4.4 节中对本章进行小结。

4.1 核-核相互作用势的微观动力学描述

4.1.1 引言

对熔合反应的理论描述主要分为俘获、熔合和存活过程三个阶段，可以用如下公式表示：

$$\sigma_{\text{ER}}(E_{\text{c.m.}}) = \sum_J \sigma_{\text{cap}}(E_{\text{c.m.}}, J) P_{\text{CN}}(E_{\text{c.m.}}, J) W_{\text{sur}}(E_{\text{c.m.}}, J). \quad (4.1)$$

其中， $E_{\text{c.m.}}$ 是质心入射能量， J 是弹靶核之间的相对运动角动量。俘获过程可作为一个一维位垒隧穿的过程处理，因此需要在相应的熔合势垒上进行势垒穿透计算。在熔合过程中弹靶核有一定概率形成复合核。普遍认为，当弹靶组合的电荷数乘积 $Z_1 Z_2 > 1000$ 时，会发生准裂变，即 $P_{\text{CN}} < 1$ 。在存活过程中，熔合过程形成的复合核通常带有激发能，它会通过蒸发中子、 γ 粒子、 α 粒子或复合核裂变等形式退激。俘获过程作为熔合

反应的第一阶段是熔合反应能否发生的关键，只有发生了俘获过程才有机会发生熔合和存活过程的反应。

在俘获过程中，当两个弹靶逐渐靠近时，它们会受到远程库仑力的排斥和短程核力的吸引，这个过程可以用核-核相互作用势表示：

$$V(r) = V_N(r) + V_C(r) + V_L(r). \quad (4.2)$$

其中，库仑势 $V_C(r)$ 和 $V_L(r)$ 的形式可以相对精确地计算，目前无法精确确定 $V_N(r)$ 。理论上可以通过各种核势模型计算核-核相互作用势，它们可以分为静态核势和动力学势两大类，在下面会详细介绍。在 TDHF 模型中，可以通过密度约束方法计算核-核相互作用势[77]。这种方法在平均场近似的框架下处理激发能，理论上是自洽的，没有引入额外的近似。然而，这种方法涉及在密度约束下的自洽迭代计算，特别是在超重核的研究中，这一过程非常耗时，不利于进行系统研究。

因此，在 TDHF 模型中，发展一个更快速的计算核-核相互作用势的方法尤为必要。拓展的 Thomas-Fermi(ETF) 近似是 Thomas-Fermi(TF) 近似的拓展。在 ETF 近似中，动能密度和自旋轨道密度表示为密度的函数。因此，可以通过对密度变分直接求得系统的基态，从而绕开求解 Kohn-Sham 方程，实现极大降低计算量。Skyrme 力结合 ETF 近似下的能量密度泛函形式在文献中[85] 进行了详细推导，ETF 近似的阶数已展开至 4 阶。同时，文中指出，更高阶的计算结果是发散的。基于密度冻结近似，刘敏等人在 2006 年，首次将 Skyrme 力结合 ETF 近似运用到核-核相互作用势研究中[47]。随后，王宁等人利用该方法做了一系列的研究工作[65,183-184]。文献[75] 中基于 ImQMD 模型的研究表明，ETF 近似在动力学反应过程中同样适用，能够较为准确地描述熔合反应动力学势垒的能量依赖性。此外，这种能量依赖行为与 DC-TDHF 模型的计算结果是一致的。

鉴于 ETF 方法在 ImQMD 模型中的成功，我们基于 TDHF 模型，并结合 ETF 近似，发展出了 ETF-TDHF 模型。本节将探讨 ETF-TDHF 模型在核-核相互作用势研究中的运用。由于球形核考虑对关联影响较小，其计算相对简单，目前的理论研究主要聚焦于双幻核反应体系。

4.1.2 核-核相互作用势的理论描述

4.1.2.1 静态核势

静态核势模型大多以核子数 A 、质子数 Z 作为基本变量，其形式相对简单，因此能够很方便地研究熔合势垒的系统性规律。然而，由于这类核势模型并未考虑反应过程中的动力学效应，特别是涉及到丰中子核参与的熔合反应，其计算的势垒高度值往往相较于实验值偏高。

• 亲近势

亲近势 (Proximity potential) 由 Blocki 等人提出[46]，亲近势写为

$$V_N^{\text{Prox}}(r) = 4\pi\gamma\bar{R}b\Phi(\zeta). \quad (4.3)$$

其中 γ 为表面张力系数:

$$\gamma = 0.061 [18.36 - 13.62(t_1^2 + t_2^2)]. \quad (4.4)$$

t_i 为中子皮系数:

$$t_i = 1.71(32.65(N_i - Z_i)/A_i - 0.063Z_iA_i^{-1/3})/(35.4 + 73.46A_i^{-1/3}). \quad (4.5)$$

平均曲率半径 $\bar{R} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ ，按照液滴模型，物质半径 $R_i = c_i + N_it_i/A_i$ 。其中 c_i 为电荷分布的半密度半径，表示为

$$c_i = R_{00i} \left(1 - \frac{7}{2} \frac{b}{R_{00i}^2} - \frac{49}{8} \frac{b}{R_{00i}^4} + \dots \right), \quad (4.6)$$

R_{00i} 为电荷半径， $R_{00i} = 1.240A_i^{1/3} + 1.646/A_i - 0.191(A_i - 2Z_i)/A_i$ 。普适函数 $\Phi(\zeta)$ 与亲近距离 $\zeta = (r - c_1 - c_2)/b$ 的参数化表达式为

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} -0.1353 + \sum_{n=0}^5 \left[\frac{c_n}{n+1} (2.5 - \zeta)^{n+1} \right] & 0 \leq \zeta \leq 2.5 \\ -0.09551 \exp\left(\frac{2.75-\zeta}{0.7176}\right) & \zeta \geq 2.5. \end{cases} \quad (4.7)$$

b 为表面厚度通常取 1 fm，其余各值为参数。目前已经发展出了许多参数组，如

Prox77[185], Prox88[186], Prox00[149] 等。其中 Prox00 中的参数分别为: $c_0 = -0.1886$, $c_1 = -0.2623$, $c_2 = -0.1526$, $c_3 = -0.04562$, $c_4 = -0.069136$, $c_5 = -0.011454$ 。

• Bass 势

Bass 势由于其形式相对简单, 在熔合反应的研究中确实得到了广泛应用。在研究熔合反应时, 我们经常会提及“垒上”或“垒下”入射能量, 这些术语通常是基于 Bass 势所描述的 Bass 势垒高度值为基准的。目前 Bass 势有许多版本, 如 Bass73[187]、Bass77[45] 及 Bass80[186]。其中, Bass80 势表示为

$$V_N^{\text{Bass80}}(r) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} g(r - R_1 - R_2). \quad (4.8)$$

其中, 中心半径 $R_i = R_{si}(1 - 0.98/R_{si}^2)$, R_{si} 是有效的锐截止半径:

$$R_{si} = 1.28A_i^{1/3} + 0.8A_i^{-1/3} - 0.76. \quad (4.9)$$

参数化函数 g 表示为

$$g(r - R_1 - R_2) = \left[0.033 \exp\left(\frac{r - R_1 - R_2}{3.5}\right) + 0.007 \exp\left(\frac{r - R_1 - R_2}{0.65}\right) \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

• Woods-Saxon 势

王宁等人基于 Woods-Saxon 势, 提出了一个改进的 Woods-Saxon(MWS) 势[153]:

$$V_N(r) = \frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}, \quad (4.11)$$

其中,

$$V_0 = u_0 [1 + \kappa (I_1 + I_2)] \frac{A_1^{1/3} A_2^{1/3}}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}}, \quad (4.12)$$

且

$$R_0 = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + c. \quad (4.13)$$

I_1, I_2 为同位旋不对称度 $I_i = (N_i - Z_i)/A_i$ 。其中, $\mu_0 = -44.16$ MeV, $\kappa = -0.4$, $r_0 = 1.27$ fm, $c = -1.37$ fm, 和 $a = 0.75$ fm。需要指出的是, MWS 势是基于密度冻结近

似下得到的，为考虑动力学形变效应引起的势垒分布，文中[153] 给出最可几的垒高大约为 $V_B \sim 0.946B_0$ ，其中 B_0 为 MWS 的势垒高度。

• CW76 势

CW76 势最早由 Christensen 等人提出[188]，2022 年，温培威等人通过拟合实验数据，发展了一个改进的 CW76 势[154]:

$$V_B^{\text{MCW}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{0.9782 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right) + 4.2833}. \quad (4.14)$$

• BW91 势

BW91 势在 1991 年被提出[152]，它的形式跟 Woods-Saxon 势相同，但采用了不同的参数。在 BW91 势中，式(4.11)中的参数取为

$$V_0^{\text{BW91}} = -16\pi \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \gamma a, \quad (4.15)$$

$$R_0^{\text{BW91}} = R_1 + R_2 + 0.29, \quad (4.16)$$

其中，

$$\gamma = 0.95 \left[1 - 1.8 \left(\frac{N_1 - Z_1}{A_1} \right) \left(\frac{N_2 - Z_2}{A_2} \right) \right], \quad (4.17)$$

R_1 和 R_2 分别为弹靶的几何半径， $R_i = \left(1.233A_i^{1/3} - 0.98A_i^{-1/3} \right)$ 。

• ETF4 势

基于弹靶核的基态密度以及能量密度泛函的表达式，在密度冻结的情形下，核-核相互作用势可以写为

$$V_N^{\text{DFT}}(\mathbf{r}) = \int \left\{ \xi_{\text{nuc}} \left[\rho^{(1)}(\mathbf{R}) + \rho^{(2)}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right] - \xi_{\text{nuc}} \left[\rho^{(1)}(\mathbf{R}) \right] - \xi_{\text{nuc}} \left[\rho^{(1)}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right] \right\} d^3 \mathbf{R}. \quad (4.18)$$

其中 ξ 为原子核的基态能量，它为弹核密度 $\rho^{(1)}(\mathbf{R})$ 和靶核的密度 $\rho^{(2)}(\mathbf{R})$ 的泛函。在实际计算中， ξ 关于密度 $\rho(r)$ 的泛函形式是未知的。利用 ETF 近似可以给出密度泛函的具体形式，进而可以计算原子核的基态密度和基态能量。在文献中[47]，刘敏等

人的研究表明, 基于 ETF 近似计算得到的核-核势与亲近势的计算结果很接近。在文献中[150], 基于 ETF 近似, 能量密度泛函被取至 4 阶近似, 即 ETF4, 根据(4.18), 核-核相互作用势可以用一个简单的函数形式进行近似表示:

$$V_N^{\text{ETF4}}(r) \approx V_0 e^{-\alpha(r-R_0)^2}. \quad (4.19)$$

其中,

$$V_0(A_1, A_2, I_1, I_2) = v_0 [1 + \kappa(I_1 + I_2)] \frac{A_1^{1/3} A_2^{1/3}}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}}, \quad (4.20)$$

以及,

$$V_N^{\text{ETF4}}(r) \approx V_0 e^{-\alpha(r-R_0)^2}. \quad (4.21)$$

参数分别取为: $r_0 = 1.183 \text{ fm}$, $b = -2.4 \text{ fm}$, $v_0 = -46.07 \text{ MeV}$, $\kappa = -0.4734$, $\alpha = 0.173 \text{ fm}^2$ 。

4.1.2.2 微观动力学势

在熔合过程中, 由于涉及许多复杂的动力学效应, 目前基于静态核势模型所采用的集体自由度难以合理处理这些效应。而基于微观动力学模型计算的微观动力学势能可以自洽地处理这些效应, 但这种方法需要付出较高的计算成本。

根据能量守恒, 在反应过程中, 势能函数可以 $V(R)$ 可以表示为

$$V(R) = E_{\text{g.s.}}^{\text{tot}}(R) - E_{\text{g.s.}}^1 - E_{\text{g.s.}}^2, \quad (4.22)$$

其中, $E_{\text{g.s.}}^1$ 、 $E_{\text{g.s.}}^2$ 分别表示弹核和靶核的基态能量, $E_{\text{g.s.}}^{\text{tot}}(R)$ 表示复合体系的基态能量, 可以表示成如下形式,

$$E_{\text{g.s.}}^{\text{tot}}(R) = E(R) - E^*(R). \quad (4.23)$$

这里 $E(R)$ 是体系的总能量, 可以直接通过动力学模型计算得到, 激发能 $E^*(R)$ 的计算则比较复杂, 这是因为它会与集体能量耦合, 无法直接将其与集体能量分离。

根据 P. Hohenberg 能量密度泛函定理[102], 体系的基态能量可由系统粒子数密度唯一确定, 也就是说可以根据密度计算基态能量。这个定理给出了从密度自由度出发精

确求解多体系统的方法，但它并没有告诉我们能量密度泛函的具体形式。实际上，在微观动力学模型中，体系在反应径迹上的密度是已知的，因此需要寻找一个理论方法计算基态能量。

目前，有两种不同的模型可以计算在反应过程中体系的基态能量：一种是基于 ImQMD 模型结合 ETF 方法，被称为 ETF-ImQMD 模型；另一种是基于 TDHF 模型结合密度约束方法，被称为 DC-DTHF 模型。

• DC-TDHF 模型

在 TDHF 模型框架下，要得到反应过程中体系的基态能量，一种可行的办法是使用 Kohn-Sham 方法[103]。该方法提出了一种策略，基于一个无相互作用的参照系统模拟实际的真实系统。依据 Hohenberg 和 Kohn 所证明的定理，如果这个参照系统与真实系统的密度相同，那么这两个系统将具有相同的基态能量[102]。这意味着，只要找到与真实系统密度相同的参考系统，就可以得到真实系统的基态能量。密度约束方法就是基于 Kohn-Sham 方法提出来的，它于 1985 年提出[89]。它与约束的 HF 方法在数值计算方法上是一样的，都是通过对反应体系的某物理量进行约束，利用迭代算法得到在该约束下的基态能量[189]。要得到整个反应路径上核-核相互作用势，需要对整个反应过程的密度做约束计算，这是非常耗时的。需要指出的是，密度约束方法与 HF 方法在相同框架下处理基态，没有引入额外的近似，这是一个重要的优势。

在反应过程中，体系在 $\mathbf{r}$ 位置处的基态能量表示为

$$E(\rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})) = \min_{\Psi \in \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})} \langle \Psi | \hat{T} + \hat{V}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle. \quad (4.24)$$

求解上式需要迭代计算，且试探波函数 $|\Psi\rangle$ 需要限制在 $\langle \Psi^* | \Psi \rangle = \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})$ 空间中搜索。为了实现这一目标，通过引入 Lagrange 不定乘子 λ ,

$$E(\rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})) = \min \left\{ \langle \Psi | \hat{T} + \hat{V}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle, -\lambda(\langle \Psi | \Psi \rangle - \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})) \right\}, \quad (4.25)$$

可以与 HF 方法使用相同的数值方法进行求解。为了提高计算速度，文献中[89]作者采用如下迭代步骤：

第一步：计算试探波函数 $\psi_i^{\text{trial}}(\mathbf{r})$:

$$\psi_i^{\text{trial}}(\mathbf{r}) = \mathcal{O} \left\{ \left[1 - x_0(\hat{h}^k - \lambda(\mathbf{r}) - \epsilon_i^k) \right] \psi_i^k(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.26)$$

其中, $\lambda(\mathbf{r}) = \int d^3r \lambda \hat{\rho}(\mathbf{r})$ 。初始试探波函数 $\varphi_i^0(\mathbf{r})$ 可以人为给定, 也可以采用上一次计算中迭代收敛的波函数。通过式(4.26)可以求出试探波函数对应的密度 $\rho^{\text{trial}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N |\psi_i^{\text{trial}}(\mathbf{r})|^2$, N 为粒子数。

第二步：更新 $\lambda(\mathbf{r})$:

$$\lambda^{k+1}(\mathbf{r}) = \lambda^k(\mathbf{r}) + c_0 \frac{\delta \rho(\mathbf{r})}{2x_0 \rho^k(\mathbf{r}) + d_0}. \quad (4.27)$$

其中, $\delta \rho(\mathbf{r}) = \rho^{\text{trial}}(\mathbf{r}) - \rho^k(\mathbf{r})$ 。定义辅助变量 $\delta \lambda(\mathbf{r})$:

$$\delta \lambda(\mathbf{r}) = c_0 \frac{\rho^k(\mathbf{r}) - \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r})}{2x_0 \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r}) + d_0}. \quad (4.28)$$

第三步：计算 $k+1$ 步的波函数

$$\psi_i^{k+1}(\mathbf{r}) = \mathcal{O} \left\{ \left[1 - x_0(\lambda^{k+1}(\mathbf{r}) - \lambda^k(\mathbf{r}) + \delta \lambda_q(\mathbf{r})) \right] \psi_i^k(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.29)$$

在实际计算中, x_0 可以用 $\hat{D}$ 替代, c_0 和 d_0 是常数, 分别取 1.9 和 5×10^{-5} 。

重复上面的三个步骤, 直到满足

$$\rho^{k+1}(\mathbf{r}) = \rho^k(\mathbf{r}) = \rho^{\text{TDHF}}(\mathbf{r}), \quad (4.30)$$

就停止迭代计算。基于收敛得到的波函数 $\psi_i^{k+1}(\mathbf{r})$ 计算体系的基态能量, 根据式(4.22)可得到 $V(R)$ 。近来, 通过使用基于 DC-DTHF 方法并结合入射波边界条件 (IWBC) 的方法, 成功计算了多个体系的熔合激发函数[129,190]。

• ETF-ImQMD 模型

根据式(2.58), 体系的总能量包含动能 T 、中心势能 U_{loc} 和库仑能 U_{Coul} 。在 ImQMD

模型框架下, 其中 U_{loc} 和 U_{Coul} 的泛函形式是已知的, 因此只需要处理 T 的计算。文献中[75]首次将 ETF 近似运用到 ImQMD 模型中, 并成功计算了 $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ 、 $^{48}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$ 和 $^{126}\text{Sn}+^{130}\text{Te}$ 三个反应体系的核-核相互作用势。该方法不仅成功再现了核-核相互作用势随入射能量的变化趋势, 而且与 DC-TDHF 模型的计算结果比较吻合。在 ETF-ImQMD 模型中, 动能 T 表示为

$$T \simeq c_0 \sum_i \rho_i^{2/3} + \frac{c_1}{\sum_i \rho_i} \sum_{i,j \neq i} f_s \rho_{ij} + c_2 N, \quad (4.31)$$

其中, $c_0 = 41.2 \text{ MeV fm}^2$, $c_1 = 4.8 \text{ MeV fm}^2$, $c_2 = -1.0 \text{ MeV}$, N 是系统的粒子数, ρ_i , ρ_{ij} , f_s 由式(2.59)给出。

• ETF-TDHF 模型

借鉴前面 ImQMD 模型对于动能的近似处理, 在 TDHF 模型中, 我们对式(2.22)中的动能和自旋轨道密度分别用 ETF 方法做近似处理。在 ETF 近似框架下, 动能密度和自旋轨道密度分别表示为

$$\begin{aligned} \tau_q^{(\text{ETF})}[\rho_q] &= \tau_q^{(\text{TF})}[\rho_q] + \tau_q^{(2)}[\rho_q] + \tau_q^{(4)}[\rho_q] + O(\hbar^6), \\ \vec{J}_q^{(\text{ETF})}[\rho_q] &= \vec{J}_q^{(2)}[\rho_q] + \vec{J}_q^{(4)}[\rho_q] + O(\hbar^6). \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中, q 用来标记质子和中子。文献[85]中指出 $\tau_q^{(6)}[\rho_q]$ 在 $r \rightarrow \infty$ 处发散。因此在本工作中, ETF 只近似只考虑至 4 阶。习惯上, 2 阶近似称为 ETF2, 4 阶近似称为 ETF4。 $\tau_q^{(\text{TF})}[\rho_q]$ 、 $\tau_q^{(2)}[\rho_q]$ 和 $\vec{J}_q^{(2)}[\rho_q]$ 写为

$$\begin{aligned} \tau_q^{(\text{TF})}[\rho_q] &= \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \rho_q^{5/3}, \\ \tau_q^{(2)}[\rho_q] &= \frac{1}{36} \frac{(\vec{\nabla} \rho_q)^2}{\rho_q} + \frac{1}{3} \Delta \rho_q + \frac{1}{6} \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla} f_q}{f_q} + \frac{1}{6} \rho_q \frac{\Delta f_q}{f_q} \\ &\quad - \frac{1}{12} \rho_q \left(\frac{\vec{\nabla} f_q}{f_q} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \rho_q \left(\frac{\vec{W}_q}{f_q} \right)^2, \\ \vec{J}_q^{(2)}[\rho_q] &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\rho_q}{f_q} \vec{W}_q. \end{aligned} \quad (4.33)$$

上式中 $f_q(\vec{r}) = 1 + \frac{2m}{\hbar^2} [b_1 \rho_q(\vec{r}) - b'_1 \rho_q(\vec{r})]$, $\vec{W}_q(\vec{r}) = b_4 \vec{\nabla}(\rho + \rho_q)$, b_1 、 b'_1 和 b_4 由式(2.30)表

示, 动能密度的 4 阶展开项 $\tau_q^{(4)}[\rho_q]$ 为

$$\begin{aligned}
\tau_q^{(4)}[\rho_q] = & (3\pi^2)^{-2/3} \frac{\rho_q^{1/3}}{4320} \left\{ 24 \frac{\Delta^2 \rho_q}{\rho_q} - 60 \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}(\Delta \rho_q)}{\rho_q^2} - 28 \left(\frac{\Delta \rho_q}{\rho_q} \right)^2 - 14 \frac{\Delta(\vec{\nabla} \rho_q)^2}{\rho_q^2} \right. \\
& + \frac{280}{3} \frac{(\vec{\nabla} \rho_q)^2 \Delta \rho_q}{\rho_q^3} + \frac{184}{3} \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \rho_q)^2}{\rho_q^3} - 96 \left(\frac{\vec{\nabla} \rho_q}{\rho_q} \right)^4 - 36 \frac{\Delta^2 f_q}{f_q} + 36 \frac{\Delta(\vec{\nabla} f_q)^2}{f_q^2} \\
& - 18 \left(\frac{\Delta f_q}{f_q} \right)^2 - 72 \frac{\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f_q)^2}{f_q^3} + 54 \left(\frac{\vec{\nabla} f_q}{f_q} \right)^4 + 12 \frac{\Delta(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q)}{f_q \rho_q} \\
& + 24 \frac{\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}(\Delta \rho_q)}{f_q \rho_q} - 36 \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}(\Delta f_q)}{f_q \rho_q} + 24 \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f_q)^2}{f_q^2 \rho_q} - 12 \frac{(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q) \Delta f_q}{f_q^2 \rho_q} \\
& - 24 \frac{\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q)}{f_q^2 \rho_q} - 44 \frac{\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q)}{f_q \rho_q^2} - 16 \frac{\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \rho_q)^2}{f_q \rho_q^2} \\
& - 52 \frac{(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q) \Delta \rho_q}{f_q \rho_q^2} + 30 \frac{(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q)^2}{f_q^2 \rho_q^2} + \frac{260}{3} \frac{(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q)(\vec{\nabla} \rho_q)^2}{f_q \rho_q^3} \Big\} \\
& + \left\{ \left[\frac{1}{4} \vec{W}_q \cdot \Delta \vec{W}_q + \frac{1}{2} \vec{W}_q \cdot \vec{\nabla}(\text{div} \vec{W}_q) + \frac{1}{8} \Delta(\vec{W}_q^2) + \frac{1}{4} (\text{div} \vec{W}_q)^2 \right] \right. \\
& - \frac{1}{2 f_q} \left[2 \vec{W}_q \cdot (\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_q + \text{div} \vec{W}_q (\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{W}_q) + \vec{\nabla} f_q \cdot (\vec{W}_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_q + \vec{W}_q^2 \Delta f_q \right. \\
& + \vec{W}_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{W}_q \cdot \vec{\nabla} f_q) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}(\vec{W}_q^2) \Big] + \frac{3}{4 f_q^2} \left[(\vec{\nabla} f_q)^2 \vec{W}_q^2 + (\vec{W}_q \cdot \vec{\nabla} f_q)^2 \right. \\
& - \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \vec{W}_q^4 \Big] + \frac{1}{6 \rho_q} \left[\vec{W}_q \cdot (\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_q + (\vec{W}_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q) \text{div} \vec{W}_q \right] \\
& \left. - \frac{1}{6 f_q \rho_q} \left[(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q) \vec{W}_q^2 + (\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{W}_q)(\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{W}_q) \right] \right\} \times (3\pi^2)^{-2/3} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\rho_q^{1/3}}{4 f_q^2}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

自旋轨道密度的 4 阶展开项 $\vec{J}_q^{(4)}[\rho_q]$ 为

$$\begin{aligned}
\vec{J}_q^{(4)}[\rho_q] = & (3\pi^2)^{-2/3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\rho_q^{1/3}}{8 f_q} \left\{ - \left[\Delta \vec{W}_q + \vec{\nabla}(\text{div} \vec{W}_q) \right] + \frac{1}{f_q} \left[\vec{W}_q \Delta f_q + (\vec{W}_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} f_q \right. \right. \\
& + (\vec{\nabla} f_q \times \text{rot} \vec{W}_q) + 2(\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_q \Big] - \frac{1}{f_q^2} \left[(\vec{\nabla} f_q)^2 \vec{W}_q + (\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{W}_q) \vec{\nabla} f_q - 2 \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \vec{W}_q^3 \right] \\
& \left. - \frac{1}{3 \rho_q} \left[(\vec{\nabla} \rho_q \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_q + \text{div} \vec{W}_q \vec{\nabla} \rho_q - \frac{1}{f_q} \left((\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{\nabla} \rho_q) \vec{W}_q + (\vec{\nabla} f_q \cdot \vec{W}_q) \vec{\nabla} \rho_q \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

将(4.32)代入式(2.22)中, 系统的基态能量表示为

$$E(\rho^{\text{TDHF}}) = E(\rho^{\text{TDHF}}, \tau^{\text{ETF}}, \vec{J}^{\text{ETF}}), \quad (4.36)$$

根据式(4.22)可计算得到 $V(R)$ 。

4.1.3 计算结果与讨论

4.1.3.1 数值检验

根据上节中的讨论, 在 ETF 近似中, 由于高阶项在无穷远处发散, 动能密度 $\tau(\vec{r})$ 和自旋轨道密度 $\vec{J}(\vec{r})$ 的形式被截断至 4 阶。因此, 首先, 我们检验了 ETF 近似的收敛性。在图21中给出了基于 ETF 方法计算得到 ^{208}Pb 的动能密度 (图 a) 和自旋轨道密度 (图 b), 其中, 蓝色虚线表示 τ_0 、橙色虚线表示 τ_2 和 J^2 、绿色虚线表示 τ_4 和 J^4 以及红色实线分别表示它们的值之和, 同时也给出了使用 HF 方法计算得到的结果作为对比, 其结果用黑色实线表示。可以看到, 图 (a) 中, τ_0 占主要贡献, τ_2 比 τ_4 的值要大得多 (为了更好的可视性, τ_4 的值放大了 10 倍), 图 (b) 中 J^2 的值也比 J^4 大很多, 表明, ETF 方法在 4 阶近似下有很好的收敛性。同时, 可以发现, 它们的值之和与 HF 计算值比较接近, 意味着用 ETF 近似描述原子核基态有一定的合理性。

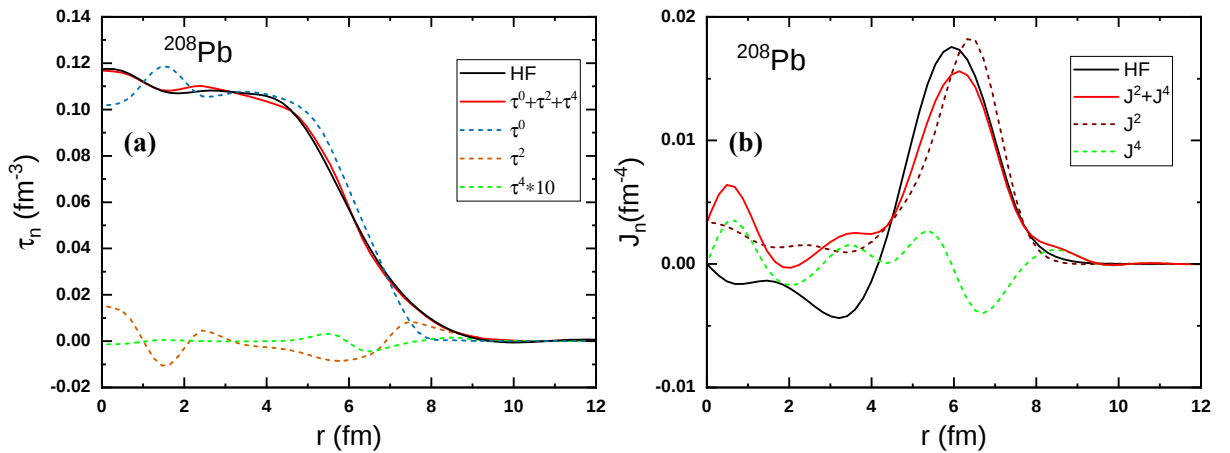


图 21 ETF 方法的不同阶近似的计算值与 HF 计算值的比较, 其中 (a) 为 ^{208}Pb 的动能密度, (b) 为 ^{208}Pb 的自旋轨道密度。

为了检验 ETF 近似描述原子核基态能量的可靠性, 在图22中给出了基于 ETF2 和 ETF4 近似计算的球形核 (包括 ^{16}O 、 ^{40}Ca 、 ^{48}Ca 、 ^{56}Ni 、 ^{90}Zr 、 ^{132}Sn 、 ^{140}Ce 和 ^{208}Pb) 的基态能量值与 HF 理论计算值的相对偏差。可以观察到, 它们的偏差都在 5% 以内, 而由于 ETF4 包含更高阶项, ETF4 的计算结果与 HF 的偏差降低至 1.5% 以内。这进一步

证明了 ETF 近似具有良好的收敛性，并且能够较好的描述原子核的基态能量。

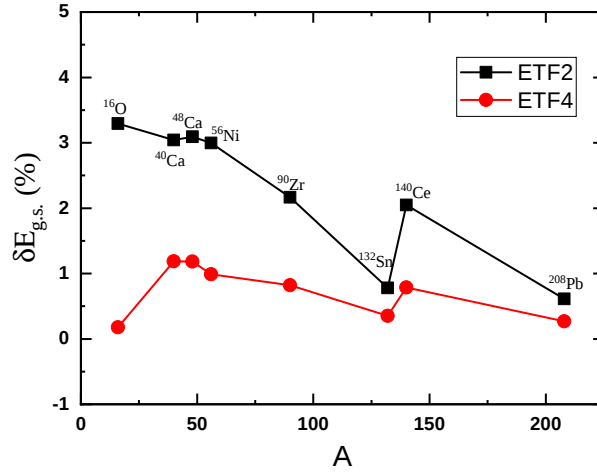


图 22 利用 ETF2 和 ETF4 计算原子核的基态能量值与实验值的相对偏差。

在图23中，我们分别基于 ETF2 和 ETF4 近似，分别计算了 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应在密度冻结近似下和入射能量 $E_{\text{c.m.}} = 76 \text{ MeV}$ 下的核-核相互作用势。其中，黑色实线为 ETF2 的结果，红色实线为 ETF4 的结果，绿色实线为库仑势。为了更直观地比较 ETF4 与 ETF2 计算结果的差异，我们在子图中特别展示了两核之间的偏差，并给出了三个特殊位置的密度分布。可以看到，无论是密度冻结近似还是动力学条件下，当两核距离比较远时，ETF2 与 ETF4 的计算结果均一致地趋近于库仑势的值，随着两核逐渐靠近，ETF2 与 ETF4 的偏差开始逐渐增大，但值得注意的是，这些偏差均保持在较小的范围内，绝对偏差小于 1 MeV。通过进一步分析子图中的密度分布，我们可以发现，随着两核接触程度越深，ETF2 与 ETF4 之间的偏差也随之显著增大。鉴于 ETF4 计算的核-核相互作用势与 ETF2 的结果仅有较小的偏差，我们认为 ETF 近似对于描述核-核相互作用势具有良好的收敛性，在接下来的计算中采用 ETF4 近似。

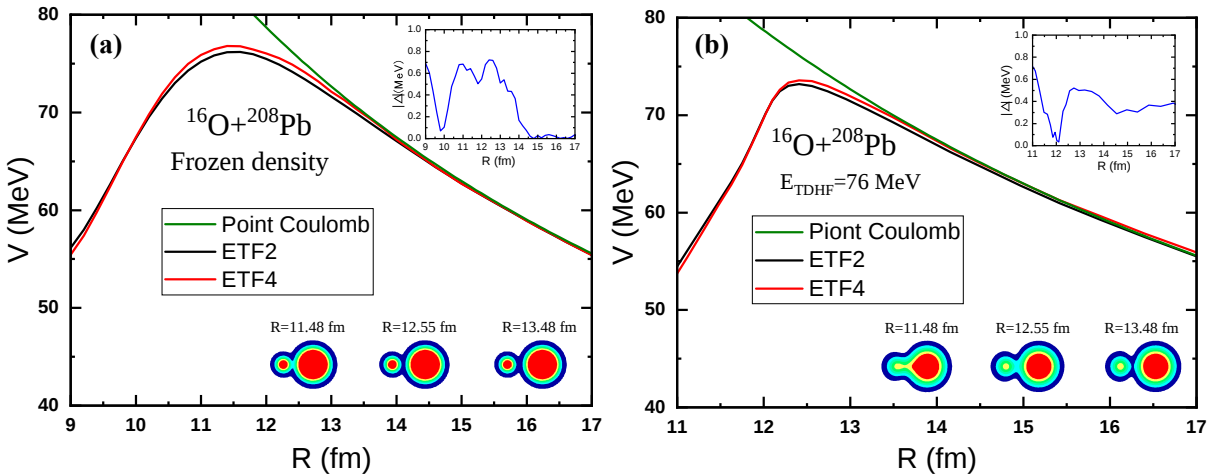


图 23 在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中的核-核相互作用势，(a) 基于密度冻结近似，(b) 基于入射能量 $E_{\text{c.m.}} = 76 \text{ MeV}$ 。其中，黑色实线为 ETF2 的结果，红色实线为 ETF4 的结果，绿色实线为库仑势。

4.1.3.2 密度冻结势

密度冻结近似下，核-核相互作用势可以用式(4.18)表示，其中 $\rho^{(1)}(\vec{R})$ 和 $\rho^{(2)}(\vec{R})$ 分别为弹靶核的密度。在 TDHF 模型中，基于密度冻结近似的方法称为 FHF，由于其计算简单，FHF 方法被广泛运用于耦合道模型中[41,191-192]。密度冻结势描述了在弹核和靶核接触(半密度半径处交叠)之前，两核保持相对独立的状态，因此，这种方法给出的核-核相互作用势更接近于非常高能量入射的原子核在反应过程中实际感受到的势垒。

图24中给出了在密度冻结近似下，基于 ETF 近似和密度约束方法计算的核-核相互作用势，分别用红色实线和绿色虚线表示。其中，(a) 为 $^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ 的结果，(b) 为 $^{48}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 的结果。可以看到，当两核距离比较远时，ETF-FHF 与 DC-FHF 的计算结果比较一致。随着两核逐渐靠近，当两核开始深度接触后，它们的计算结果才开始出现明显偏差。因此，在密度冻结近似下，ETF 方法可以用来描述熔合势垒。同时，可以观察到，FHF 方法计算的核-核相互作用势能随着两核距离减小而快速降低，并没有出现 ETF-FHF 与 DC-FHF 那样的“势垒口袋”，这是因为当两核逐渐靠近时密度冻结近似违反了泡利原理。在 ETF-FHF 方法中，ETF 近似体系考虑了核子在费米面以下的占据问题，而在 DC-FHF 方法中，通过密度约束方法可以计算在相同密度下体系的基态能量，从而实现单粒子态的重新占据。因此，它们都出现了图 (a) 和 (b) 中所示的势垒口袋。

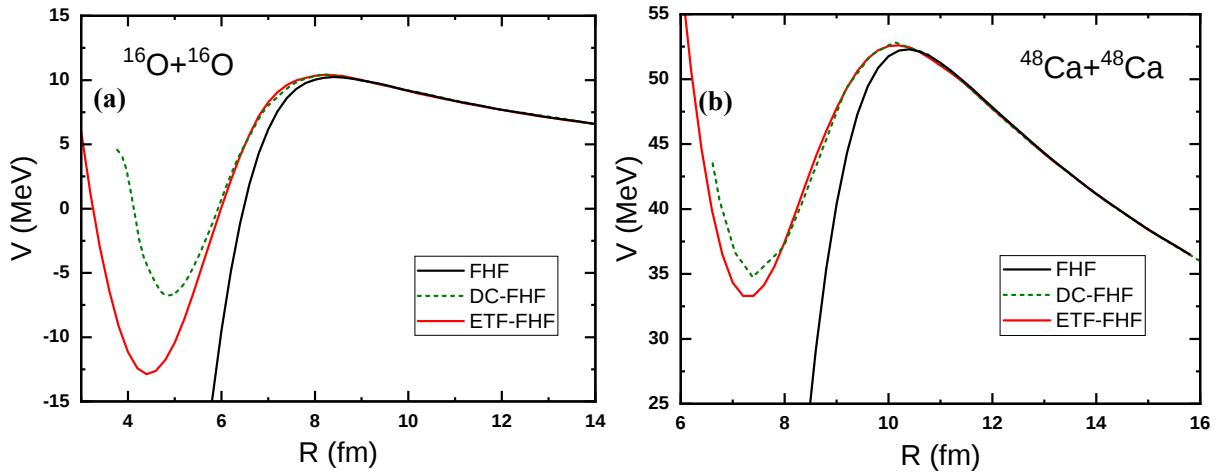


图 24 密度冻结势：ETF-FHF 计算值 (红色实线) 与 DC-FHF 计算值 (绿色虚线) 的比较，其中，(a) 为 $^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ 的结果，(b) 为 $^{48}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 的结果。

4.1.3.3 动力学势

在势垒附近的反应中，由于核子运动相对比较缓慢，体系有足够的时间通过核子转移、动力学形变等方式进行动力学调整。因此，体系感受到是动力学势而不是密

度冻结势。图25中给出了基于 ETF-TDHF 和 DC-TDHF 方法计算动力学势。在 (a) 中给出的是 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 的计算结果，其中黑色实线和蓝色实线分别为 $E_{\text{c.m.}} = 76 \text{ MeV}$ 和 $E_{\text{c.m.}} = 90 \text{ MeV}$ 的计算结果，虚线对应的是 DC-TDHF 计算的结果，绿色实线为库仑势。可以看到，与密度冻结下类似，当两核距离比较远时，ETF-TDHF 与 DC-TDHF 的计算结果比较一致。随着两核逐渐靠近，当两核开始深度接触后，它们的计算结果才开始出现明显偏差。此外，可以看到随着入射能量增加，势垒高度增大，势垒半径减小且势垒厚度变宽，ETF-TDHF 计算的核-核相互作用势的能量依赖行为与 DC-TDHF 一致。

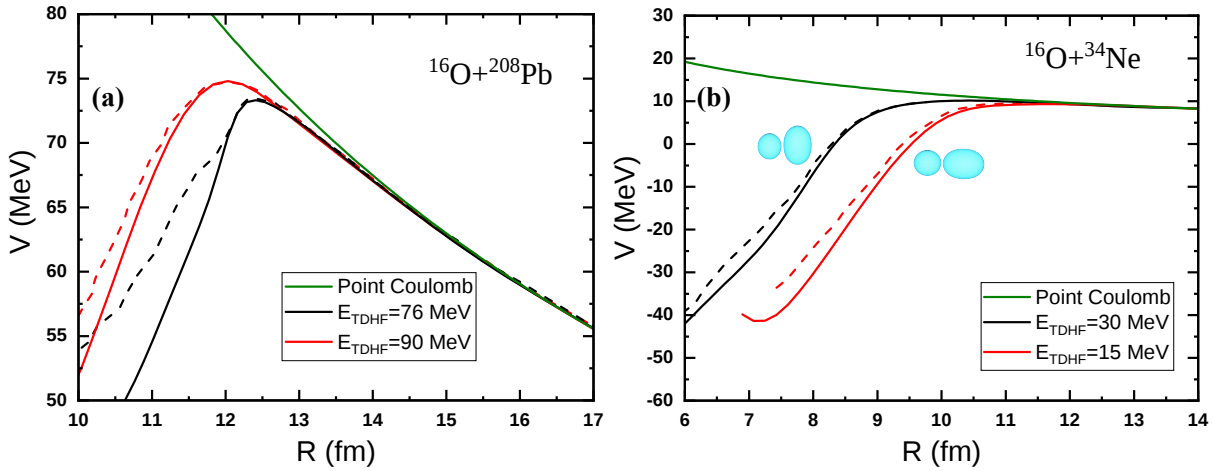


图 25 动力学势：ETF-FHF 计算值 (实线) 与 DC-TDHF 计算值 (虚线) 的比较，其中 (a) 为 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 的结果，(b) 为 $^{16}\text{O}+^{34}\text{Ne}$ 的结果。

进一步的，我们研究了弹靶核初始形变对核-核相互作用势的影响，特别是针对 $^{16}\text{O}+^{34}\text{Ne}$ 反应体系。在这个体系中， ^{34}Ne 是形变核，根据 HF 计算，它的 β_2 形变为 0.28。在图25中的 (b) 图给出了 $^{16}\text{O}+^{34}\text{Ne}$ 的计算结果。其中，腰取向上采用的入射能量为 30 MeV，头取向上的入射能量为 15 MeV。可以看到，ETF-TDHF 与 DC-TDHF 方法计算的核-核相互作用势在两个取向上都非常靠近，仅当两核距离减小至深度接触后，它们的计算结果才开始出现明显偏差。同时，腰取向的势垒明显高于头取向，但其势垒半径则偏小。这表明，ETF 近似对于形变原子核参与反应的体系同样适用。

图26中给出了 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系的熔合势垒半径和高度随入射能量的变化，其中，绿色虚线为 DC-FHF 计算的势垒高度值。为了更直观，图 (a) 将势垒半径用 $R_1 + R_2$ 做了约化， R 表示原子核的半径 ($R = 1.4A^{1/3}$)，图 (b) 将势垒高度用熔合阈值 $V_{\text{B}}^{\text{TDHF}}$ 做了约化，它们的横坐标都以 $V_{\text{B}}^{\text{TDHF}}$ 的相对值给出。从图 (a) 中可以看出，随着入射能量升高，势垒半径逐渐减小，在入射能量大于 3 倍 $V_{\text{B}}^{\text{TDHF}}$ 后，势垒半径不再发生变化。同时，从密度分布来看，当入射能量越高时，在势垒半径处，两核接触形成的颈部区域会

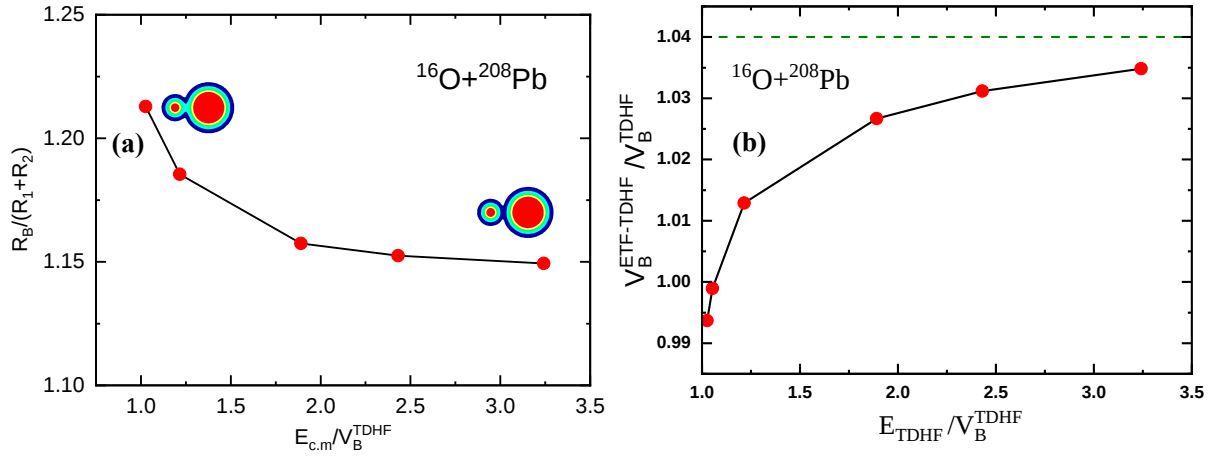


图 26 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的势垒半径 (图 (a)) 和势垒高度 (图 (b)) 随入射能量的变化。其中, 绿色虚线为 DC-FHF 计算的势垒高度值。

变得更小。在图 (b) 中, 绿色虚线是基于密度冻结近似 (DC-FHF) 计算的势垒高度。可以发现, 随着入射能量升高, 势垒高度逐渐增大, 在入射能量大于 3 倍 V_B^{TDHF} 后, 势垒高度开始缓慢升高, 并逐渐靠近 DC-FHF 模型计算的势垒高度。

由于熔合势垒高度是能量依赖的, 基于实验数据提取的熔合势垒高度为最可几势垒高度[65]。在3.1小节中的研究表明, 它跟基于 TDHF 模型利用熔合阈方法的计算结果比较靠近。因此, 我们利用熔合阈方法得到势垒高度作为参考, 将其作为 ETF-TDHF 模型的入射能量, 进而检验该模型计算势垒高度时的可靠性。需要指出的是, 这里采用的相互作用参数 Sly4d[193], 与3.1小节中采用的相互作用不同。表5中给出了六个球形核参与的反应的熔合势垒高度与实验值的比较。其中, V_B^{EXP} 为实验值, $V_B^{\text{ETF-TDHF}}$ 为 ETF-TDHF 模型的计算结果, V_B^{TDHF} 为熔合阈方法的计算结果。可以看到, 针对这六个体系, ETF-TDHF 模型的计算的势垒高度与实验数据非常接近, 绝对误差均小于 1 MeV, 相对误差均小于 5%, 同时, 与熔合阈方法的计算结果也比较靠近。

表 5 利用 ETF-TDHF 模型和熔合阈方法计算的势垒高度值 ($V_B^{\text{ETF-TDHF}}$ 和 V_B^{TDHF}) 与实验值 (V_B^{EXP}) 的比较。

Reaction	V_B^{EXP} (MeV)	V_B^{TDHF} (MeV)	$V_B^{\text{ETF-TDHF}}$ (MeV)
$^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$	10.86 ± 0.06	10.03	10.37
$^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$	23.72 ± 0.53	22.88	23.21
$^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$	74.20 ± 0.03	74.03	73.56
$^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$	53.21 ± 0.03	52.76	53.70
$^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$	51.33 ± 0.33	51.55	51.30
$^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$	96.85 ± 0.12	95.85	96.55

4.1.4 小结

我们基于 TDHF 模型, 结合 ETF 近似方法, 发展了 ETF-TDHF 模型, 并进一步运用于重离子核-核相互作用势的研究中。首先, 我们验证了 ETF 近似中动能密度和自旋轨道密度的收敛性, 并进一步检验了其对于基态能量的描述以及核-核相互作用势在密度冻结近似和动力学碰撞条件下的描述, 它们均表现出了非常好的收敛性。接着, 基于 ETF-TDHF 模型, 我们分别计算了密度冻结势和动力学势, 计算结果表明, 在弹靶核深度接触之前, ETF-TDHF(FHF) 模型的计算结果与 DC-TDHF(HF) 模型的计算结果高度一致。随着入射能量的升高, 熔合势垒半径逐渐减小, 而势垒高度逐渐增大, 当能量升高至 3 倍熔合阈值后, 这些变化几乎趋于稳定。此外, 基于 ETF-TDHF 模型计算得到的六个双幻核反应的势垒高度与实验值非常接近, 绝对误差均小于 1 MeV, 相对误差均小于 5%。

4.2 重离子熔合激发函数的理论研究

4.2.1 引言

激发函数用于描述某种物理过程或现象随特定参数 (如能量、温度、压力等) 的变化关系, 在物理学各个分支领域有非常广泛的应用。在核物理中, 激发函数被用来描述某种特定的核反应过程随入射粒子能量的变化关系。这些激发函数可以通过实验直接测到, 也可以通过理论进行计算。常见的有共振激发函数[194]、衰变激发函数[195] 及粒子散射激发函数[196] 等。熔合激发函数是描述熔合反应截面随入射粒子能量变化的函数。熔合激发函数对于理解核反应机制、确定熔合势垒高度及研究核结构等具有重要意义, 基于实验测量的熔合激发函数对能量进行二次微分可以得到势垒分布。通过势垒分布可以定性研究原子核结构效应和动力学效应在熔合反应中的影响。例如, 研究发现, $^{16}\text{O}+^{154}\text{Sm}$ 与 $^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ 的势垒分布有明显的倾向性不同, 这是因为 ^{144}Sm 是 $-\beta_4$ 形变而 ^{154}Sm 的 $+\beta_4$ 形变, 这表明势垒分布对 β_4 敏感。 $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ 双核体系的势垒分布呈现单高斯形状且宽度比较窄, 这是因为双幻原子核结合得比较紧密, 在反应过程中核子不容易发生转移[37]。自上世纪六十年代以来, 实验上测量了上千组不同弹靶体系的熔合激发函数, 为理解熔合反应提供了丰富的实验数据[197]。

熔合反应涉及到原子核形变、核子转移、能量耗散等复杂动力学过程, 这些过程会

强烈影响熔合激发函数。因此，在理论上需要基于传统核势模型，并考虑核子内部运动自由度，如核激发(振动激发、转动激发、巨共振等)和核子转移等，与相对运动自由度的耦合[37]，耦合会使熔合势垒变成多个势垒。迄今为止，对于耦合的处理主要有两类，第一类是唯象方法，如耦合道方法[44]。除了标准的耦合道外还引入了各种效应，如中子转移[198]，压缩势[199]和复势[200]等，以解决极端垒下的实验数据。第二类是微观动力学方法，如 DC-TDHF 模型[77]和 ImQMD 模型[75]。为考虑耦合效应，唯象方法需要引入额外参数，而在微观方法中，这些效应是自洽包含在模型中的，无需引入额外参数。

本工作通过基于 ETF-TDHF 模型计算得到的核-核相互作用势，结合传输矩阵方法求解熔合几率，进而得到熔合激发函数。

4.2.2 传输矩阵方法

量子隧穿现象是微观世界的基本现象之一，它在物理学和化学领域都发挥着重要作用。在核物理中，精确计算任意形状势垒的穿透概率，对描述熔合反应、 α 衰变的半衰期、裂变等具有重要的意义。文献[201]中，作者提出基于传输矩阵的数值方法精确求解势垒穿透概率。如图 27 所示，在传输矩阵方法中通过将势垒和有效质量分割成 N 个小部分，代替直接求解薛定谔方程。此时，熔合势垒 $V(R)$ 和有效质量 $u(R)$ 表示为分段阶跃函数：

$$\begin{aligned} V_j &= V \left(\frac{R_{j-1} + R_j}{2} \right) \\ \mu_j &= \mu \left(\frac{R_{j-1} + R_j}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中， $R_{j-1} > R > R_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N, N+1$)。能量为 E 的粒子在第 j 区域的波函数 $\psi_j(R)$ 表示为

$$\psi_j = A_j \exp^{ik_j x} + B_j \exp^{-ik_j x}. \quad (4.38)$$

式中， A_j 表示投射系数， B_j 表示反射系数， $k_j = \sqrt{2u_j(E - V_j)}/\hbar$ 。根据波函数及其导数在每个区域的连续性条件， A_j 和 B_j 的值可以简化为

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = \prod_{l=0}^{j-1} M_l \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

其中,

$$M_l = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (1 + S_l) \exp[-i(k_{l+1} - k_l)R_l] & (1 - S_l) \exp[-i(k_{l+1} + k_l)R_l] \\ (1 - S_l) \exp[i(k_{l+1} + k_l)R_l] & (1 + S_l) \exp[i(k_{l+1} - k_l)R_l] \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$S_l = \frac{\mu_{l+1}}{\mu_l} \frac{k_l}{k_{l+1}}. \quad (4.41)$$

对于给定的入射波和出射波的边界条件, 通过设置 $A_0 = 1$ 和 $B_{N+1} = 0$, 可以得到射系数 A_{N+1} 和穿透几率 $T(E)$:

$$\begin{aligned} A_{N+1} &= \frac{\mu_{N+1}}{\mu_0} \frac{k_0}{k_{N+1}} \frac{1}{M_{22}}, \\ T(E) &= \frac{\mu_0}{\mu_{N+1}} \frac{k_{N+1}}{k_0} |A_{N+1}|^2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

其中,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \prod_{l=0}^N M_l. \quad (4.43)$$

基于穿透几率 $T(E)$, 势垒穿透截面表示为

$$\sigma_E = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) T_l(E). \quad (4.44)$$

其中, λ 为入射道相对运动的波长, l 为入射道相对运动的角动量。在图 28 中, 黑色实线表示用传输矩阵方法计算的结果, 红色实心方框是基于 Modified Numerov 算法[56]的计算结果。图 (a) 是势垒穿透概率, 图 (b) 是熔合激发函数。可以看到, 传输矩阵方法与 Modified Numerov 算法计算的结果基本一致, 这验证了我们程序的正确性。

4.2.3 计算结果与讨论

4.2.3.1 熔合激发函数

我们基于 ETF-TDHF 方法计算了四个双幻核反应体系 (包括 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{132}\text{Sn}$) 的核-核相互作用势, 并利用传输矩阵方法计算熔合概率, 进而得到了它们的熔合激发函数。图29中给出了它们的计算结果与实验数据的比较, 其

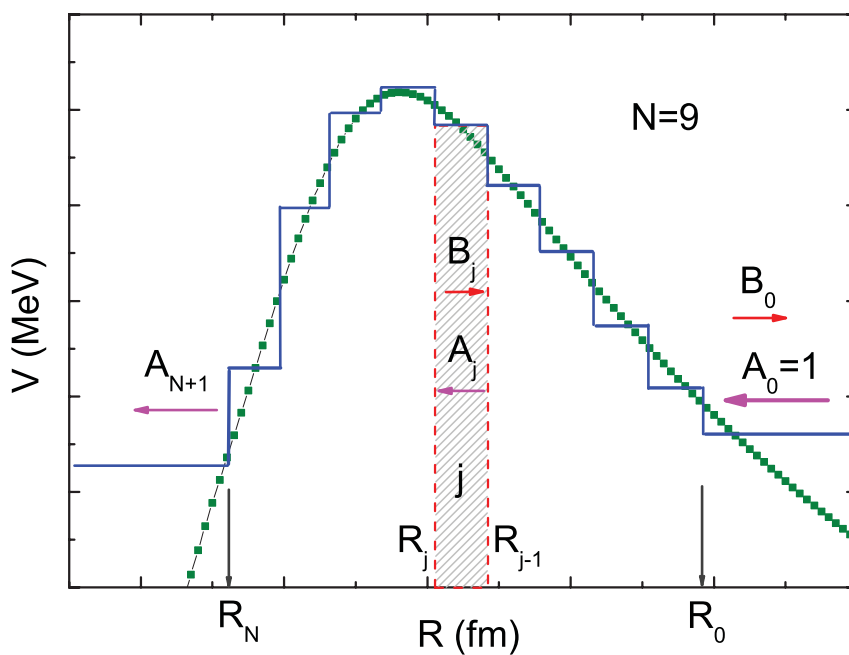


图 27 将势垒形状分割成 9 份，粒子在穿过程中发生穿透和反射的示意图[201]。

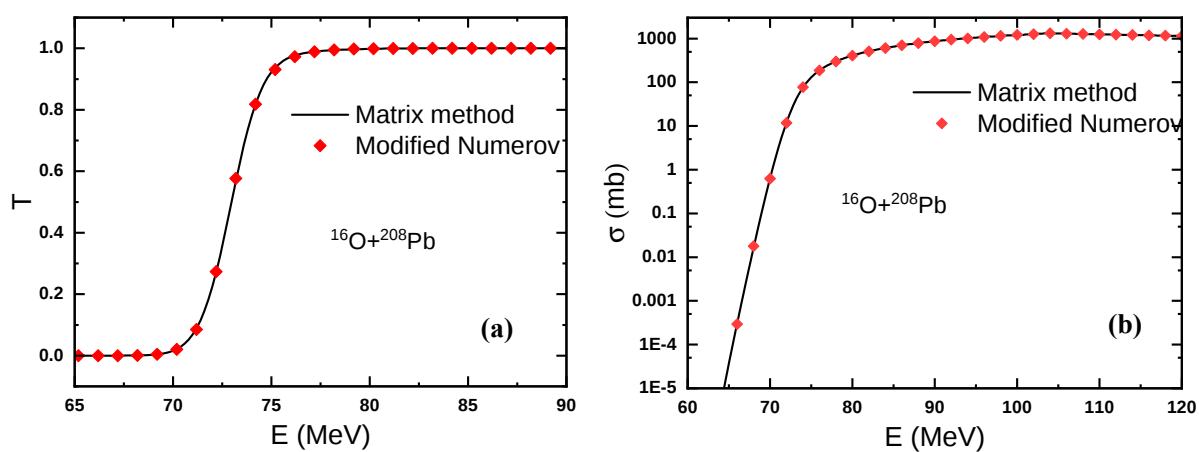


图 28 在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中：(a) 为在不同入射能量的势垒穿透几率，(b) 为熔合激发函数。

中, (a) 中实验数据取自[145-146], (b) 取自[171], (c) 取自[202-203], (d) 取自[204]。此外, 图中用绿色实线、蓝色实线和黑色实线分别表示三个不同的入射能量的计算结果。

在上一节中的研究表明, 入射能量对核-核相互作用势有强烈影响, 对应的熔合势垒明显不同。熔合激发函数对熔合势垒非常敏感, 特别是垒下部分, 熔合势垒高度升高 1 MeV, 会带来熔合截面数量级的改变。因此, 在本工作中, 我们分别取了低、中和高三个不同的入射能量进行计算。从图29可以看到, 在这四个体系中, 在势垒附近和垒下能量区域的实验数据与低入射能量的理论计算值比较符合, 而在垒上能量区域的实验数据与较高入射能量的理论计算值比较一致。这是因为, 随着入射能量减小, 势垒高度减小、势垒半径增大且势垒展宽减小, 相应的熔合几率增大, 对应熔合截面增大。同时, 我们可以看到, 理论计算结果很好再现这四个体系垒下部分的实验数据, 垒下部分的增强得到了很好地描述。需要说明的是, 在计算中, 微观动力学模型没有额外引入参数, 这个计算结果是非常可靠的。

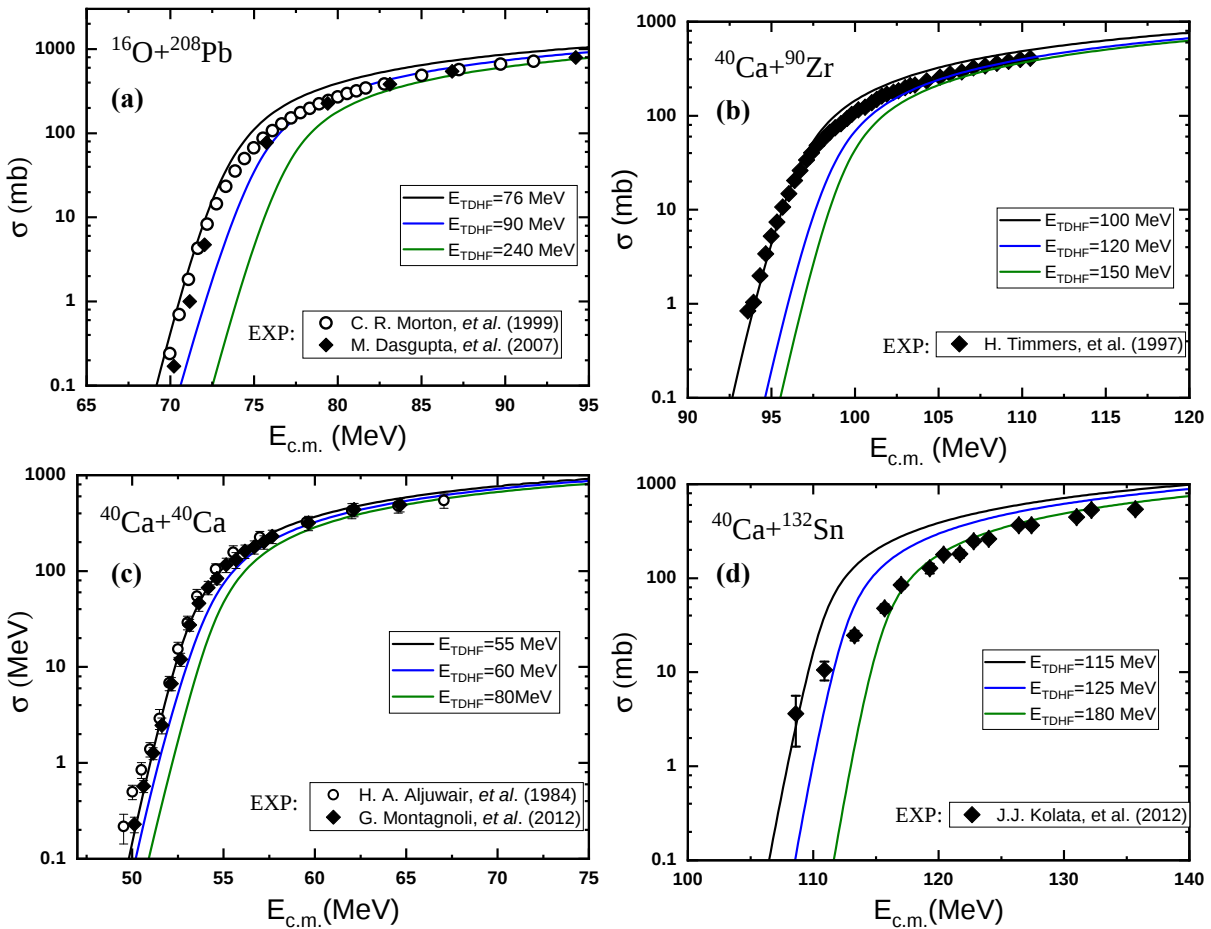


图 29 熔合激发函数的理论计算值与实验值的比较: (a) $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$, (b) $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$, (c) $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$, (d) $^{40}\text{Ca}+^{132}\text{Sn}$ 。其中, 实线为理论计算结果, 散点图为实验数据 ((a) 取自[145-146]、(b) 取自[171]、(c) 取自[202-203]、(d) 取自[204])。

4.2.3.2 势垒分布

原子核内部核子的运动自由度对势垒分布非常敏感。实验上，可以通过熔合激发函数、背角弹性或背角准弹性散射激发函数抽取势垒分布。其中，对于熔合激发函数的抽取，通常采用三点微分法：

$$\frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2} = 2 \left[\frac{(E\sigma_{\text{fus}})_3 - (E\sigma_{\text{fus}})_2}{E_3 - E_2} - \frac{(E\sigma_{\text{fus}})_2 - (E\sigma_{\text{fus}})_1}{E_2 - E_1} \right] \left(\frac{1}{E_3 - E_1} \right), \quad (4.45)$$

对应势垒分布 $D^{\text{fus}}(E)$ 的能量 $E = (E_1 + 3E_2 + E_3)/4$ 。在等能量步长 $\Delta E = E_2 - E_1 = E_3 - E_2$ 的条件下，上式可以简化为

$$\frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2} = \frac{(E\sigma_{\text{fus}})_3 - 2(E\sigma_{\text{fus}})_2 + (E\sigma_{\text{fus}})_1}{\Delta E^2}. \quad (4.46)$$

对应势垒分布的误差表示为

$$\delta D^{\text{fus}}(E) \approx \left(\frac{E}{\Delta E^2} \right) \left[(\delta\sigma_{\text{fus}})_1^2 + 4(\delta\sigma_{\text{fus}})_2^2 + (\delta\sigma_{\text{fus}})_3^2 \right]^{1/2}, \quad (4.47)$$

其中， $(\delta\sigma_{\text{fus}})_i$ 为实验测量误差，进而可以得到

$$\delta D^{\text{fus}}(E) \sim \sqrt{6} \left(\frac{E}{\Delta E^2} \right) (\delta\sigma_{\text{fus}}). \quad (4.48)$$

根据上式可以发现，在垒上区域，由于具有较大的 E 值且实验测量数据存在较大的绝对误差 $(\delta\sigma_{\text{fus}})$ ，该区域的势垒分布误差 $\delta D^{\text{fus}}(E)$ 较大。相比之下，垒下区域的误差相对较小。此外，在抽取势垒分布时，由于势垒分布本身具有约 $0.56\hbar\omega$ (2-3 MeV) 的分布宽度，因此在实际计算中，为了得到较光滑的势垒分布， ΔE 通常取 2-3 MeV。在本工作中， ΔE 取为 3 MeV。

基于熔合激发函数，通过(4.47)式，我们对图29中涉及到的反应体系抽取了势垒分布，图30中分别给出了基于实验数据得到的结果和基于 TDHF 理论计算得到的结果，与图29采用相同的标记。可以看到，基于 TDHF 理论计算值抽取的势垒分布是光滑的，而基于实验数据抽取的势垒分布，特别是垒上能量区域，则有较大的误差棒。这是因为，理论计算值是连续的，而实验数据在测量时，通常在一定的能量间隔下测量，因此会导

致数据点的离散性和不确定性增加。同时，随着入射能量的升高，理论计算分布的中心逐渐右移，且低能时，其峰值与实验数据分布峰值较为接近，这种变化可以解释为在低能下和在高能下熔合势垒的差异导致的。尽管在垒上能量区域，实验数据存在较大的不确定性，但很明显，高入射能量下的理论计算值没有重现这个四个体系在垒上能量区域的势垒分布。这可能是因为，实验测量的势垒分布提供的是动力学绝热势垒分布的信息，而非体系在更高能量下感受到的真实势垒。

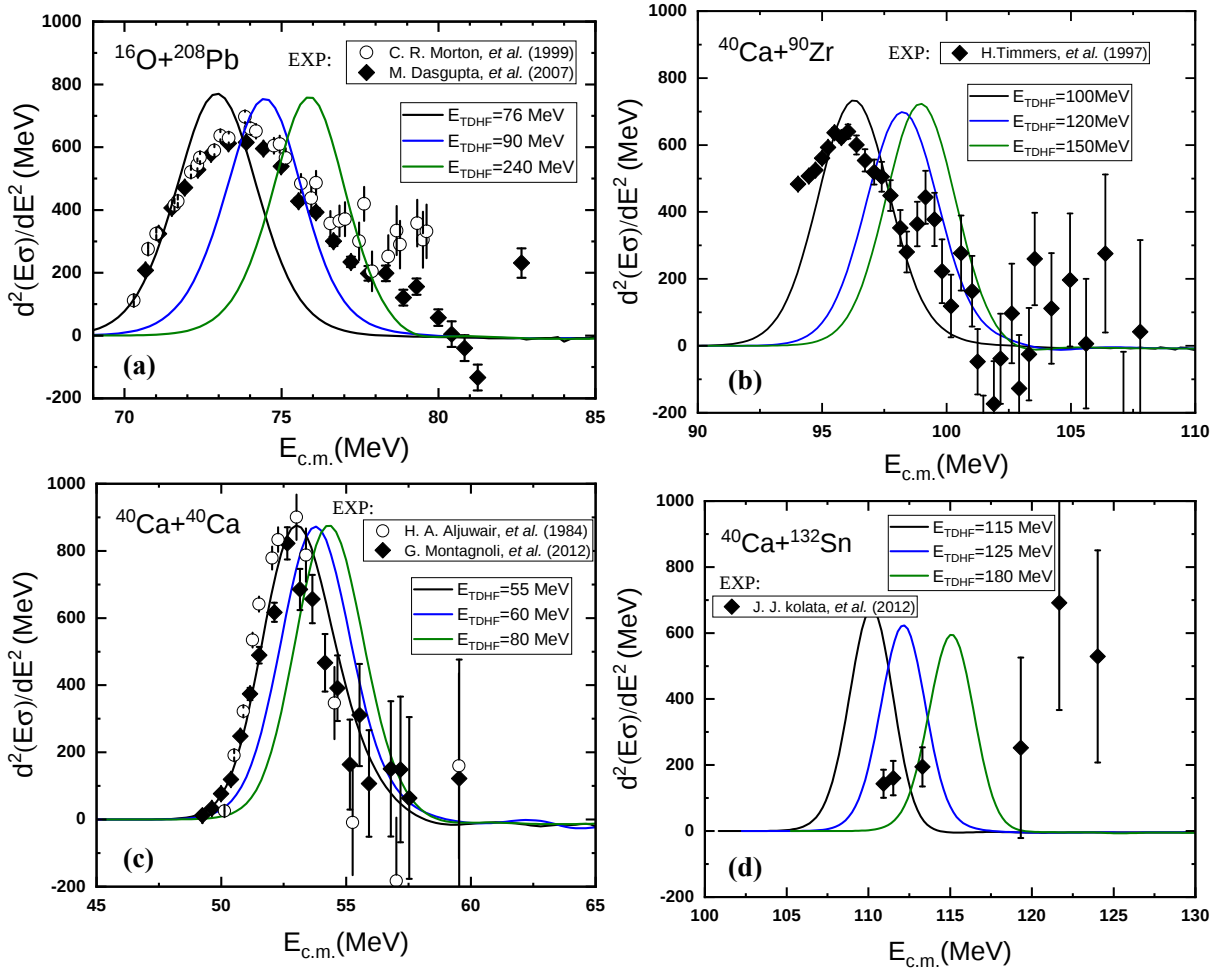


图 30 势垒分布的理论计算值与实验值的比较：(a) $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$, (b) $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$, (c) $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$, (d) $^{40}\text{Ca}+^{132}\text{Sn}$ 。其中，实线为理论计算结果，散点图为实验数据 (同图29)。

4.2.4 小结

我们利用 ETF-TDHF 方法计算了四个双幻核反应体系（包括 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ 和 $^{40}\text{Ca}+^{132}\text{Sn}$ ）的核-核相互作用势，并通过传输矩阵方法计算了相应的熔合激发函数，进一步得到了相应的势垒分布。鉴于核-核相互作用势强烈的能量依赖性，我们利用三个不同入射能量计算相应的核-核相互作用势。研究发现，在垒下及势垒附近的区域，实验数据与较低入射能量下的理论计算值符合较好，而在垒上能量区域，实验

数据则与较高入射能量下的理论计算结果比较一致。随着入射能量的升高，我们发现理论计算得到的势垒分布中心逐渐向右偏移。值得注意的是，在高入射能量时，理论计算的势垒分布无法重现这四个体系在高能区域的势垒分布，这可能是因为，实验测量的势垒分布提供的是动力学绝热势垒的分布信息，而非体系在更高能量下感受到的实际势垒。

4.3 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中形变效应的研究

4.3.1 引言

形状是我们认识宏观物体和感知外部世界的基本元素之一，人们可以根据物体的不同形状特征对物体进行分类和识别。在微观世界下的量子体系中，形状特征不像在宏观世界中那样直观和易于理解。这是因为微观粒子没有确定的坐标和动量，但它们可以表现出叠加特性，这种特性使得多粒子体系表现出许多集体行为，如超导性、量子相干、晶格振动等物理现象。原子核作为一个量子多体系统，自然而然的也会表现出许多集体效应，譬如原子核的振动和转动等。原子核形变与这些集体行为紧密相关，它反应了核子之间多体关联的性质和特征，是理解原子核结构的重要出发点。理论研究表明，除了少数幻数原子核外，大部分原子核是具有形变的[133-134]。

原子核的形变也会影响核反应的动力学过程，特别是在低能核反应中，核子运动相对缓慢，伴随着核子转移和密度的重新分配发生动力学形变，使得熔合势垒改变，进而影响最终反应产物。很显然，弹靶核形变取向对这一过程也会有比较显著的影响。库仑位垒附近的熔合反应是合成超重核素和丰质子核素重要的理论方法之一，理论和实验都进行了广泛的研究。最近实验上系统测量了 ^{40}Ar 轰击 ^{165}Ho 、 ^{169}Tm 、 ^{174}Yb 、 ^{175}Lu 、 ^{176}Hf 、 ^{181}Ta 这几个镧系原子核熔合蒸发反应的实验数据[205]，我们研究发现这些实验数据与基于 MWS 势的理论[183] 计算结果相差较大，部分体系高达 3 个数量级。由于 MWS 势结合统计衰变程序 HIVAP[206] 能非常好描述 ^7Li 、 ^{12}C 、 ^{16}O 轰击 ^{208}Pb 靶这一系列熔合蒸发反应[183]，因此我们想弄清楚理论计算与实验数据系统性的偏差的主要原因。

利用微观动力学研究熔合反应中的形变效应具有显著的优势，它能对核结构中的形变效应和核反应产生的形变效应统一起来进行描述。近年来，人们利用密度约束的

TDHF(DC-TDHF) 方法对熔合反应做了大量的研究工作[90,94,127,129]。然而 DC-TDHF 方法需要在反应路径上做密度约束计算, 计算成本非常高。因此, 在本节中我们首先对 DC-TDHF 方法数值计算方法上做了改进, 以 $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ 为例做了数值检验, 然后将改进的模型运用到 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应的研究中。

4.3.2 对 DC-TDHF 方法的改进

在计算中, DC-TDHF 方法需要对反应过程中特定位置上的波函数进行密度约束计算, 它跟形状约束的 Hartree-Fock 自洽迭代计算方法本质上是一样的。为了节约计算时间, 特定位置的选取通常以时间步长为标准, 将时间步长设定为 $\Delta t=2\text{fm}/c$ [90]。按照这个时间步长, 利用 DC-TDHF 方法计算重离子熔合反应的核-核相互作用势大约需要在 200 个位置处做密度约束计算。因此这是一个非常巨大的计算量, 尤其是对于超重核反应体系。

为了尽可能降低 DC-TDHF 方法的计算量而不影响精度, 我们把它跟 ETF-TDHF 方法结合起来。在前面小节中, 我们发现 ETF-TDHF 方法能比较精确给出反应体系在弹靶深度接触之前的核-核相互作用势。因此, 可以基于 ETF-TDHF 方法确定的核-核相互作用势形状, 对需要进行密度约束计算的位置的进行估计。这样处理的好处是, 对于核-核相互作用势能曲线曲率比较小的区域, 可以选取比较少的位置做约束计算, 而对于核-核相互作用势能曲线曲率比较大的区域, 则选取较多的位置做密度约束计算。由于核-核相互作用势在熔合位垒附近的形状类似一个倒抛物线的形式, 曲率通常比较大。因此可以根据当前位置距离势垒半径 R_B 的远近程度确定计算步长, 具体数值细节如下:

$$\begin{cases} |R - R_B| < 0.5 \text{ fm}, \Delta R = 0.5 \text{ fm} \\ R - R_B > 1.5 \text{ fm}, \Delta R = 1.2 \text{ fm} \\ R - R_B < 0.5 \text{ fm}, \Delta R = 0.6 \text{ fm} \end{cases} \quad (4.49)$$

式中 R 表示两核的质心距离, ΔR 表示上次密度约束计算时两核质心距离与当前位置处两核质心距离的差值, 势垒半径 R_B 通过 ETF-TDHF 方法计算得到。在后面的计算中, 我们将这种方法记为 DC-TDHF++ 方法。

为了验证 DC-TDHF++ 方法的正确性, 我们首先检验了用式 (4.49) 选取的目标位

置, 在进行密度约束计算时的精度。图 31 给出的是在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系中, 两核距离 R 分别在 10.7 fm、8.5 fm 和 5.9 fm 处, 体系进行密度约束计算前与计算后的密度分布。其中 (a) 为质子的密度分布, (b) 为中子的密度分布。黑色实线表示进行约束计算前的体系的密度分布, 红色虚线表示进行约束计算后体系的密度分布。从图中可以看到, 这两个密度基本重合。这表明在计算过程中, 进行密度约束计算时, 在保证能量最低的同时, 所得到的密度分布与进行密度约束计算迭代前的密度分布基本一致。图 32

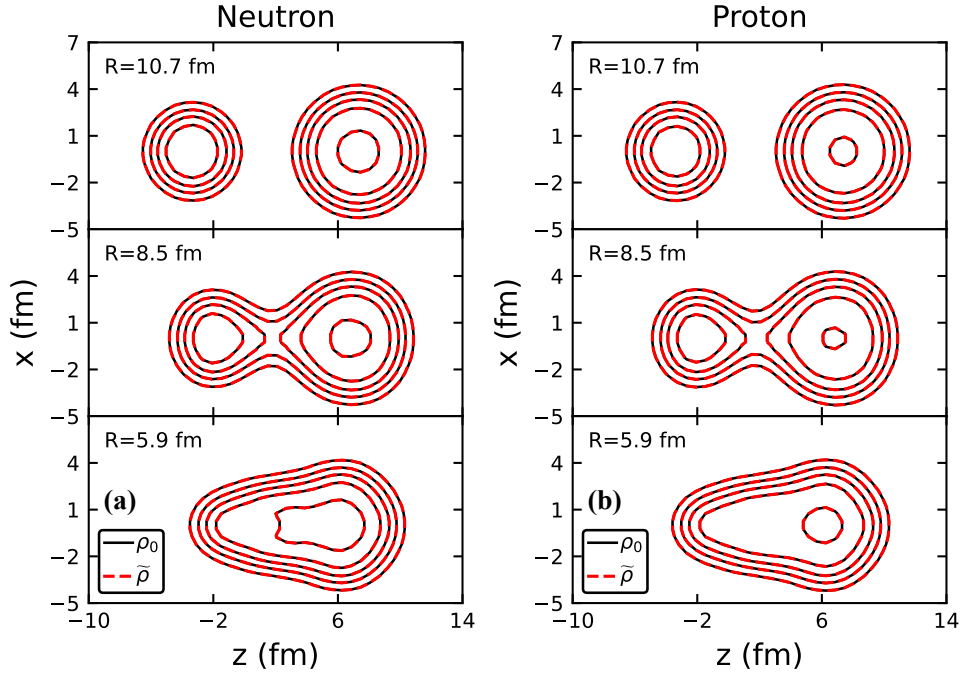


图 31 在 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应中, 在两核距离 R 为 10.7 fm、8.5 fm 和 5.9 fm 处体系进行密度约束计算前 (实线) 与计算后 (虚线) 的密度分布。(a) 为质子的密度分布, (b) 为中子的密度分布。

中分别给出了用 ETF-TDHF、DC-TDHF、DC-TDHF++ 方法计算得到 $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ 反应体系在 $E_{\text{c.m.}}=25$ MeV 能量下的核-核相互作用势。绿色圆点为 DC-TDHF++ 方法计算的结果, 橙色实线是 DC-TDHF 以 $\Delta t = 2$ fm/c 步长计算的结果, 浅蓝色虚线是 ETF-TDHF 计算的结果。我们可以看到, DC-TDHF++ 方法的结果与 DC-TDHF 方法计算的曲线基本重合, ETF-TDHF 方法在熔合势垒附近比 DC-TDHF 方法的结果略高。需要说明的是, DC-TDHF++ 方法在这里只挑选了 17 个位置进行密度约束计算, 相较于 DC-TDHF 方法采用固定步长的计算量要少得多, 其计算量约为后者的 1/10。

为了进一步检验 DC-TDHF++ 方法计算核势的可靠性, 图 33 中 (a) 给出的是 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系的核-核相互作用势, 绿色实线表示的 DC-TDHF++ 的结果, 橙色虚线表示的 ETF-TDHF 的结果, (b) 中给出利用 (a) 中的核-核相互作用势计算的熔合激发函数与实验值的比较, 实验数据取自[145]。可以发现, DC-TDHF++ 明显改善了

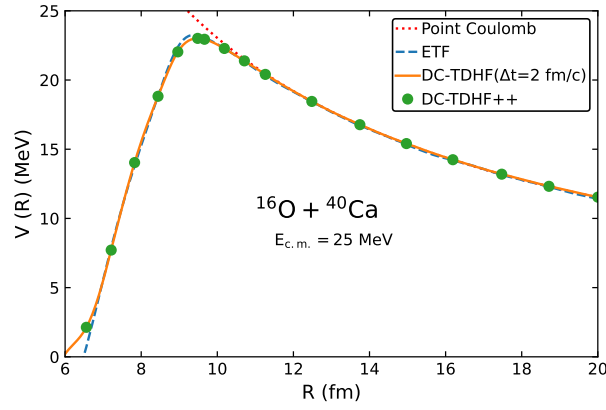


图 32 利用 ETF-TDHF(蓝色虚线)、DC-TDHF(黄色实线) 和 DC-TDHF++(绿色实线圆) 计算得到 $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ 反应在 $E_{c.m.}=25\text{ MeV}$ 能量下的核-核相互作用势。

ETF-TDHF 方法对核-核相互作用势在垒下部分的描述。ETF-TDHF 方法在垒下部分的计算值比 DC-TDHF++ 方法的计算值低，所以对应 (b) 中计算熔合激发函数偏高。而 DC-TDHF++ 描述的核-核相互作用势比较合理，因此能较好再现 (b) 中的实验数据。在接下来对 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应体系的研究中，我们采用 DC-TDHF++ 方法计算核-核相互作用势。

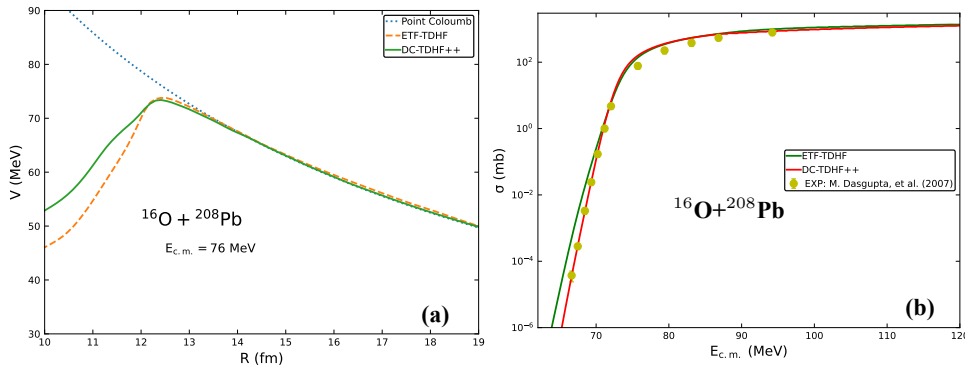


图 33 (a) 利用 ETF-TDHF(绿色实线) 和 DC-TDHF++(黄色实线) 计算 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应的核-核相互作用势, (b) 基于 (a) 中的核-核相互作用势计算的熔合激发函数与实验值的对比, 实验数据取自[145]。

4.3.3 计算结果与讨论

在超重体系的熔合蒸发反应中，复合核通常具有较高的激发能，会通过蒸发中子、质子、 α 粒子等轻粒子退激发，不同的退激发模式称为不同的反应道。不同反应道的蒸发剩余截面 $\sigma_{\text{ER}} = \sigma_{\text{cap}} P_{\text{CN}} W_{\text{sur}}$ 。其中 σ_{cap} 表示的是俘获截面、 P_{CN} 是复合核形成几率及 W_{sur} 是复合核存活概率。在本工作中，我们利用 MWS 势计算俘获截面 σ_{cap} ，统计衰变模型 HIVAP 计算复合核存活概率 W_{sur} 。同时，我们将复合核形成几率 P_{cn} 取为 1，具体原因在稍后给出。图 34 给出的是 ^{40}Ar 分别与 ^{165}Ho 、 ^{169}Tm 、 ^{174}Yb 、 ^{175}Lu 、 ^{176}Hf 和 ^{181}Ta 的熔合反应的部分反应道的蒸发剩余截面的理论计算值与实验值比较。其中黑色

实线是 MWS 势结合统计衰变模型 HIVAP 计算的结果, 红色实心点为实验测量值。可以看到, 理论计算的蒸发剩余截面与实验值差别较大, 特别是 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 和 $^{40}\text{Ar}+^{181}\text{Ta}$ 这两个体系的偏差到达了两个数量级以上。我们初步认为, 准裂变有可能对这些体系影响较大, 导致复合核形成几率 $P_{\text{cn}} < 1$, 从而使得理论计算值偏高。

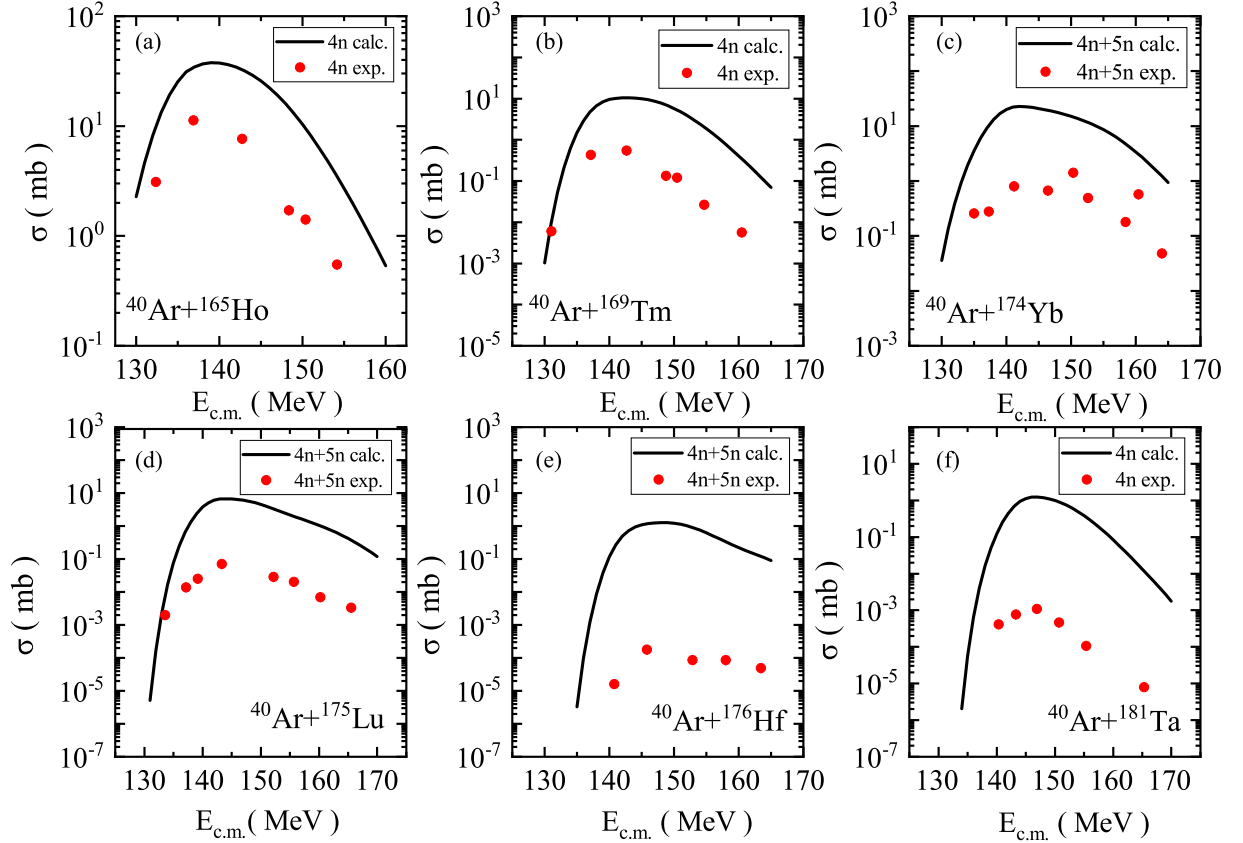


图 34 ^{40}Ar 与 ^{165}Ho (a)、 ^{169}Tm (b)、 ^{174}Yb (c)、 ^{175}Lu (d)、 ^{176}Hf (e) 和 ^{181}Ta (f) 的熔合反应的部分反应道的蒸发剩余截面的理论计算值与实验值比较。

为了分析准裂变对 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应体系的影响, 我们用 DC-TDHF++ 方法计算了该体系的核-核相互作用势。由于 TDHF 模型计算比较耗时, 我们只对这一个体系进行研究。由于靶核是形变核, 我们对靶核在头 (Tip) 和腰 (Side) 两个取向下分别进行了计算。在进行计算时, 我们选取了不同的入射能量, 分别是 $1.0V_B^{\text{MWS}}$ 、 $0.99V_B^{\text{MWS}}$ 以及 $1.05V_B^{\text{MWS}}$ 。在定态和动态计算中, 采用 Skyme 相互作用参数 Sly4d[193], 核子大小分别为 $30 \times 30 \times 30 \text{ fm}^3$ 和 $30 \times 30 \times 50 \text{ fm}^3$ 。图 35 展示的是利用 DC-TDHF++ 方法计算得到的, 在不同入射能量下, $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应在 Tip 和 Side 两种取向下的核-核相互作用势。可以看到, 入射能量越高, 熔合势垒高度越高, 且 Side 方向的势垒高度整体比 Tip 方向高。此外, 这两个方向上的核-核相互作用势俘获势阱的深度都超过 20 MeV, 在 3.2.3.2 小节中的研究表明, 入射核被靶核俘获后发生准裂变的概率极低, 证明我们前面将复合

核形成几率 P_{cn} 设定为 1 是合理的。

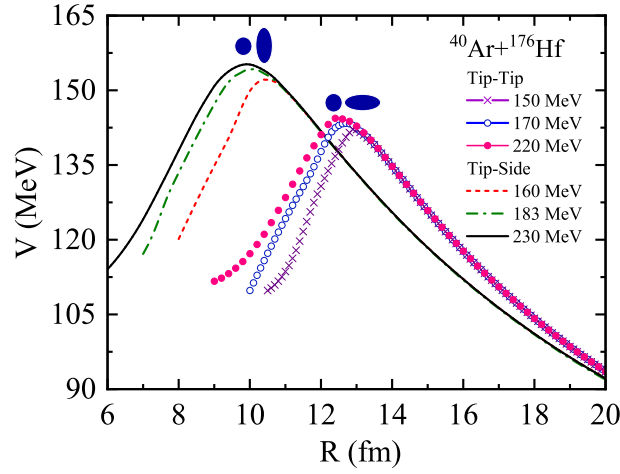


图 35 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 在不同入射能量下, 靶核在头 (Tip) 和腰 (Side) 两种取向下的核-核相互作用势。

根据图 35 中所示的核-核相互作用势, 我们利用 4.2 节中介绍的传输矩阵方法计算势垒穿透概率, 进而得到俘获截面 σ_{cap} 。图 36 给出的是通过 MWS 势和 DC-TDHF++ 方法计算得到的核-核相互作用势, 进一步计算得到的俘获截面。(a) 和 (b) 中的红色实线是基于 MWS 势计算的俘获截面值, 黑色虚线和绿色虚线则分别代表了 Tip 和 Side 方向上的俘获截面值。可以看到, 这两种方法在垒上能量区域对俘获截面的描述基本吻合, 但在势垒附近及垒下能量区域有显著差别。同时, DC-TDHF++ 方法的计算表明, 靶核的形变取向对计算结果影响有显著影响, 由于图 35 中 Side 方向的势垒高度明显高于 Tip 方向, 因此在垒下部分, Side 方向上的俘获截面值相较于 Tip 方向上的截面值显著降低。在计算中, 我们将 Tip 方向的计算结果作为上限值, 将 Side 方向的计算结果作为下限值。结合统计衰变模型 HIVAP 程序, 我们计算了 $1p2n+1p3n$ 反应道和 $\alpha2n+\alpha3n$ 反应道的蒸发剩余截面。图 36 中 (a) 给出了 $1p2n+1p3n$ 反应道的结果, 图 36(b) 给出了 $\alpha2n+\alpha3n$ 反应道的结果。其中, 天蓝色虚线表示基于 MWS 势得到的结果, 而灰色区域为 DC-TDHF++ 方法计算得到的结果, 圆点和方框是实验数据[183]。可以发现, 在熔合势垒附近, DC-TDHF++ 方法的计算结果能很好地再现实验数据, 实验数据更靠近灰色区域的下限, 这意味着反应体系在 Side 方向上的发生反应的几率更大, 与文中[125]的结论一致。然而, 在入射能量为 $E_{\text{c.m.}} \approx 134 \text{ MeV}$ 处, 实验数据更靠近 MWS 势计算的结果, 这一现象凸显出, 对于这一反应的熔合过程, 实现统一的描述仍然是一个待解决的挑战。

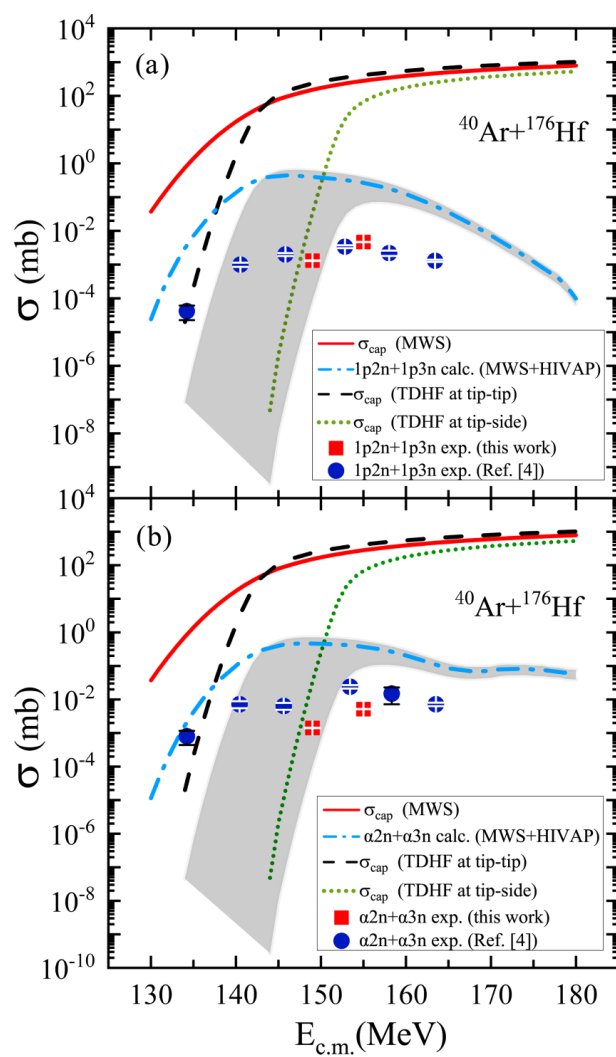


图 36 在 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应中, 不同反应道的蒸发剩余截面的理论计算值与实验值的比较, 其中 (a) 为 $1p2n+1p3n$ 反应道, (b) 为 $\alpha2n+\alpha3n$ 反应道。

4.3.4 小结

我们结合 ETF-TDHF 模型, 对 DC-TDHF 模型做了改进, 发展了 DC-TDHF++ 方法。这一改进在保持计算精度的同时, 显著降低了运算量, 计算时间约为改进前的 1/10。我们以 $^{16}\text{O}+^{40}\text{Ca}$ 为例做了数值检验, 经过验证, DC-TDHF++ 方法与原始的 DC-TDHF 方法所得结果高度一致。DC-TDHF++ 方法改善了 ETF-TDHF 方法在垒下部分对熔合势垒的描述不足, 因此能够较好地再现 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 反应体系的熔合激发函数。随后, 我们将此方法应用于 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 反应研究中, 结果表明该体系的核-核相互作用势与形变取向紧密相关, 特别是在 Side 方向上的熔合势垒高度值明显大于 Tip 方向上的势垒高度值。同时, 我们结合统计衰变模型 HIVAP 程序计算了该体系 $1\text{p}2\text{n}+1\text{p}3\text{n}$ 和 $\alpha 2\text{n}+\alpha 3\text{n}$ 反应道的蒸发剩余截面。研究发现, 在熔合势垒附近, DC-TDHF++ 方法的计算能很好地再现实验数据, 实验数据更靠近 Side 方向的计算结果, 这意味着反应体系在 Side 方向上发生反应的几率更大。然而, 在入射能量为 $E_{\text{c.m.}} \approx 134 \text{ MeV}$ 处, 实验数据更靠近 MWS 势计算的结果。这一现象凸显出, 对于这一反应的熔合过程, 实现统一的描述仍然是一个待解决的难题。

第五章 总结及展望

5.1 总结

在重离子熔合反应中，当弹靶核逐渐趋近时，它们之间的核-核相互作用势呈现出一种独特的形状，类似于一道障碍或壁垒，这种形状导致了它们在相互靠近时受到显著的“阻碍”效果。因此，通常人们将这一特定区域内的核-核相互作用势定义为“熔合势垒”，其大小和形状与反应产物的生成截面、出射粒子能谱以及产物分布等紧密相关。

熔合势垒涉及三个比较重要的参数：势垒高度 V_B 、势垒半径 R_B 以及俘获势阱深度 B_{qf} 。普遍认为，在电荷乘积 $Z_1 Z_2 < 1000$ 的核反应中，当两核接触时体系位于势垒内侧，且俘获势阱较深，只要弹核被靶核俘获，它们就能发生熔合，此时熔合势垒高度等同于俘获势垒高度。然而，在更大电荷乘积 $Z_1 Z_2 > 1000$ 的核反应中，情况则有所不同。当两核接触时体系位于势垒外侧，且俘获势阱通常较浅，这意味着需要额外推力才能使体系越过势垒，进而实现熔合。因此，在这种情况下，熔合势垒高度会明显高于俘获势垒高度，体系可能发生深度非弹散射 (DIC)、准裂变和熔合-裂变等反应类型，这些反应类型与俘获势阱深度紧密相关。

微观动力学模型——时间依赖的 Hartree-Fock (TDHF) 能够模拟核反应过程中核子的动力学演化，并根据核反应计算核-核相互作用势，从而进一步提取熔合势垒的信息。此外，TDHF 模型模拟原子核的碰撞过程是一个半经典过程，即当弹核的入射能量低于某个特定值时，它将无法克服势垒与靶核形成复合系统，这个特定能量被称为熔合阈能，可将其用来估算势垒高度。大量理论研究表明，对于轻体系，俘获阈能等同于熔合阈能；而对于重体系，熔合阈能高于俘获阈能。

本论文主要基于 TDHF 模型系统研究重离子熔合反应的势垒信息以及反应机制。首先，我们利用 TDHF 模型系统计算了 144 个近球形核反应体系的俘获阈能，并与通过拟合熔合激发函数提取的熔合势垒高度进行了比较。研究发现，对于弹靶都是幻数核的熔合反应，TDHF 模型给出的俘获阈能与实验提取的最可几俘获势垒高度非常接近。对于近球形核引起的熔合反应，由于弹靶的第一激发态相对较低，需要考虑俘获位置的体系激发能 (大约 1 MeV)，才能与实验提取值更接近。对于 144 个反应体系，TDHF 模型给出的俘获势垒与实验提取值之间的均方根偏差仅为 1.43 MeV，明显小于

其它六个唯象核势的计算结果。进一步地, 基于 TDHF 模型计算的势垒参数作为微观输入, 采用 Siwek-Wilczyński 熔合截面公式, 成功再现了 $^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ 、 $^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ 、 $^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ 、 $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ 和 $^{132}\text{Sn}+^{40,48}\text{Ca}$ 这七个体系的熔合激发函数。同时发现, 熔合体系的反应 Q 值会影响垒下截面, 相对较大的反应 Q 值会导致俘获位置的体系激发能较高, 从而导致弹靶的动力学形变与核子转移更容易, 进而引起垒下截面的增强。

其次, 为了精确地分析质量数-总动能 (M-TKE) 分布, 我们提出了两个函数来区分俘获事件、准弹性 (QE) 散射及深度非弹散射 (DIC) 事件。我们发现, 当基于 Skyrme 能量密度泛函结合密度冻结近似计算的俘获势阱深度减小时, 俘获事件与 DIC 事件的比例明显减小。基于这一发现, 实验能够通过测量的 M-TKE 分布提取出俘获势阱深度。进一步地, 结合改进的量子分子动力学 (ImQMD) 模型模拟, 我们发现, QE 散射事件的接触时间小于 200 fm/c, 而类裂变事件的接触时间则大于 600 fm/c, 俘获与接触截面的比例随着俘获势阱深度的增加而系统地增加。

最后, 我们在 TDHF 模型的基础上, 结合拓展的 Thomas-Fermi(ETF) 近似, 发展了 ETF-TDHF 模型。研究表明, 在弹靶深度接触之前, ETF-TDHF 模型计算的结果与密度约束的 TDHF 模型的结果高度一致, 而在计算势垒高度时 ETF-TDHF 方法能够节省大量的计算耗时。我们还注意到熔合势垒具有强烈的能量相关性。基于 ETF-TDHF 模型计算出的熔合势垒, 我们利用传输矩阵方法进一步计算了熔合激发函数及其势垒分布。在对 $^{40}\text{Ar}+^{176}\text{Hf}$ 熔合反应中, 我们研究发现入射道的形变取向对熔合势垒具有显著影响, 这一影响会改变蒸发剩余截面, 头对腰碰撞的计算结果与实验数据更接近。

5.2 展望

(1) 我们已系统计算了 144 个近球形体系的俘获阈能, 在超重核区开展熔合阈能的系统计算是我们下一步工作的重点, 我们能进一步提取额外推力, 分析额外推力的系统性规律, 为实验提供更精确的理论依据。

(2) 随着国内对合成超重新元素的研究日益深入, 理论与实验的结合愈发紧密。为此, 我们计划利用新发展的 ETF-TDHF 模型或 TDHF+SW 模型开展理论研究, 为实验提供最佳入射能量和最佳弹靶组合的理论指导。

(3) 在目前的工作中, 我们尚未考虑对关联效应对俘获阈能或熔合阈能的影响。对关联对于原子核结构具有显著影响, 在核反应中对关联同样发挥着显著作用。为了更全

面的理解熔合反应的反应机制，我们将研究对关联效应对俘获阈能或熔合阈能的影响。

(4) 本工作发现，在超重反应体系中，随着俘获势阱的逐步变浅，DIC 事件对于俘获截面以及复合核形成概率的影响变得逐步变强。这一发现为实验提供了一个全新的视角来测量俘获势阱深度。我们计划将 DIC 事件的相对截面作为提取俘获势阱深度的探针，并通过计算更多反应体系来验证这一方法的可行性。

参考文献

- [1] M. D. Blaufox. Becquerel and the discovery of radioactivity: Early concepts[C]// Seminars in nuclear medicine: vol. 26: 3. 1996: 145-154.
- [2] E. Rutherford. LXXIX. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1911, **21**(125): 669-688.
- [3] E. Rutherford. LIV. Collision of α particles with light atoms. IV. An anomalous effect in nitrogen[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1919, **37**(222): 581-587.
- [4] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron[J]. Nature, 1932, **129**(3252): 312-312.
- [5] O. Hahn, F. Strassmann. Proof of the Formation of Active Barium from Uranium and Thorium by Neutron Bombardment[J]. Naturwissenschaften, 1939, **27**(1): 11-15.
- [6] H. Yukawa. On the interaction of elementary particles. I[J]. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series, 1935, **17**: 48-57.
- [7] M. G. Mayer. On Closed Shells in Nuclei. II[J]. Physical Review, 1949, **75**(12): 1969-1970.
- [8] H. Hall. On the Evaluation of the Fermi β -Distribution Function[J]. Phys. Rev., 1950, **79**: 745-745.
- [9] A. Bohr. The coupling of nuclear surface oscillations to the motion of individual nucleons [M]. Munksgaard, 1952.
- [10] 本书编写组. 中国学科发展战略·核物理与等离子体物理[M]. 第 31 版. 科学出版社.
- [11] X. H. Zhou, Z. Y. Zhang, Z. G. Gan, *et al.* Research program of superheavy elements and nuclides based on HIAF[J]. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2020, **50**(11): 112002.
- [12] 靳根明. 原子核碰撞的过程——核反应[J]. 现代物理知识, 2023, **35**(2): 3-14.
- [13] N. Bohr. Neutron Capture and Nuclear Constitution[J]. Nature, 1936, **137**(3461): 344-348.
- [14] L. Yinfang, Y. Xinliang, W. Meng, *et al.* Review and a New Design of the Chart of Nuclides[J]. 原子核物理评论, 2023, **40**(1): 121-139.
- [15] M. Thoennessen. The Discovery of Isotopes[M]. Springer International Publishing, 2016.
- [16] G. Münzenberg, P. Armbruster, H. Folger, *et al.* Identification of element 107 by α -decay energy measurements[J]. Physical Review Letters, 1981, **47**(18): 1288-1291.

- [17] G. Münzenberg, P. Armbruster, H. Folger, *et al.* Observation of element 108[J]. Zeitschrift für Physik A, 1982, **309**(2): 89-92.
- [18] S. Hofmann, F. Heßberger, D. Ackermann, *et al.* The new element 109[J]. Zeitschrift für Physik A, 1999, **355**(4): 283-286.
- [19] G. T. Seaborg, W. Loveland, A. Türler, *et al.* Discovery of the element with atomic number 110[J]. Physical Review C, 1994, **49**(2): R262-R265.
- [20] S. Hofmann, V. Ninov, F. Heßberger, *et al.* The new element 111[J]. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 1995, **350**: 281-282.
- [21] S. Hofmann, V. Ninov, F. Hessberger, *et al.* The new element 112[J]. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 1996, **354**: 229-230.
- [22] K. Morita, K. Morimoto, D. Kaji, *et al.* Experiment on the synthesis of element 113 in the reaction $^{209}\text{Bi} (^{70}\text{Zn}, n)^{278}113$ [J]. Journal of the physical Society of Japan, 2004, **73**(10): 2593-2596.
- [23] V. Utyonkov, N. Brewer, Y. T. Oganessian, *et al.* Experiments on the synthesis of super-heavy nuclei ^{284}Fl and ^{285}Fl in the $^{239,240}\text{Pu} + ^{48}\text{Ca}$ reactions[J]. Physical Review C, 2015, **92**(3): 034609.
- [24] Y. T. Oganessian, F. S. Abdullin, S. Dmitriev, *et al.* Investigation of the $^{243}\text{Am} + ^{48}\text{Ca}$ reaction products previously observed in the experiments on elements 113, 115, and 117 [J]. Physical Review C, 2013, **87**(1): 014302.
- [25] Y. T. Oganessian, V. Utyonkov, Y. V. Lobanov, *et al.* Measurements of cross sections for the fusion-evaporation reactions $^{244}\text{Pu}(^{48}\text{Ca}, xn)^{292-x}114$ and $^{245}\text{Cm}(^{48}\text{Ca}, xn)^{293-x}116$ [J]. Physical Review C, 2004, **69**(5): 054607.
- [26] Y. T. Oganessian, V. Utyonkov, Y. V. Lobanov, *et al.* Synthesis of the isotopes of elements 118 and 116 in the ^{249}Cf and $^{245}\text{Cm} + ^{48}\text{Ca}$ fusion reactions[J]. Physical Review C, 2006, **74**(4): 044602.
- [27] Y. T. Oganessian, V. Utyonkov, Y. V. Lobanov, *et al.* Attempt to produce element 120 in the $^{244}\text{Pu} + ^{58}\text{Fe}$ reaction[J]. Physical Review C, 2009, **79**(2): 024603.
- [28] S. Hofmann, S. Heinz, R. Mann, *et al.* Review of even element super-heavy nuclei and search for element 120[J]. The European Physical Journal A, 2016, **52**: 1-34.
- [29] A. Balantekin, J. Carlson, D. Dean, *et al.* Nuclear theory and science of the facility for rare isotope beams[J]. Modern Physics Letters A, 2014, **29**(11): 1430010.
- [30] J. Wei, H. Ao, B. Arend, *et al.* Accelerator commissioning and rare isotope identification at the Facility for Rare Isotope Beams[J]. Modern Physics Letters A, 2022, **37**(09): 2230006.
- [31] V. Bednyakov, N. Russakovich. The Joint Institute for Nuclear Research in Experimental Physics of Elementary Particles[J]. Physics of Particles and Nuclei, 2018, **49**: 331-373.

- [32] T. Sumikama, T. Kubo, N. Fukuda, *et al.* First success of RI-beam separation and particle identification for nuclei with atomic number $Z > 82$ at RIKEN RI beam factory[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 2020, **463**: 237-240.
- [33] H. Sakai, H. Haba, K. Morimoto, *et al.* Facility upgrade for superheavy-element research at RIKEN[J]. The European Physical Journal A, 2022, **58**(12): 238.
- [34] J. Äystö, K.-H. Behr, J. Benlliure, *et al.* Experimental program of the Super-FRS Collaboration at FAIR and developments of related instrumentation[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 2016, **376**: 111-115.
- [35] A. Herlert. NUSTAR—The teenage years: Towards operation at FAIR[J]. Hyperfine Interactions, 2017, **238**(1): 35.
- [36] Y. Chung, H. Kim, M. Kwon. Current status of the RAON low-energy heavy ion accelerator[J]. Journal of the Korean Physical Society, 2022, **80**(8): 693-697.
- [37] 林承健. 重离子核反应[M]. 哈尔滨工程大学出版社, 2018.
- [38] H. Timmers, J. Leigh, M. Dasgupta, *et al.* Probing fusion barrier distributions with quasi-elastic scattering[J]. Nuclear Physics A, 1995, **584**(1): 190-204.
- [39] T. E. Strohmayer, E. F. Brown. A remarkable 3 hour thermonuclear burst from 4U 1820–30[J]. The Astrophysical Journal, 2002, **566**(2): 1045.
- [40] A. Cumming, L. Bildsten. Carbon flashes in the heavy-element ocean on accreting neutron stars[J]. The Astrophysical Journal, 2001, **559**(2): L127.
- [41] K. VoPhuoc, C. Simenel, E. Simpson. Dynamical effects in fusion with exotic nuclei[J]. Physical Review C, 2016, **94**(2): 024612.
- [42] N. Rowley, G. R. Satchler, P. Stelson. On the “distribution of barriers” interpretation of heavy-ion fusion[J]. Physics Letters B, 1991, **254**(1-2): 25-29.
- [43] J. R. Leigh, M. Dasgupta, D. J. Hinde, *et al.* Barrier distributions from the fusion of oxygen ions with $^{144,148,154}\text{Sm}$ and ^{186}W [J]. Physical Review C, 1995, **52**: 3151-3166.
- [44] K. Hagino, K. Ogata, A. Moro. Coupled-channels calculations for nuclear reactions: From exotic nuclei to superheavy elements[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2022, **125**: 103951.
- [45] R. Bass. Nucleus-nucleus potential deduced from experimental fusion cross sections[J]. Physical Review Letters, 1977, **39**(5): 265.
- [46] J. Błocki, J. Randrup, W. Świątecki, *et al.* Proximity forces[J]. Annals of Physics, 1977, **105**(2): 427-462.
- [47] M. Liu, N. Wang, Z. Li, *et al.* Applications of Skyrme energy-density functional to fusion reactions spanning the fusion barriers[J]. Nuclear Physics A, 2006, **768**(1-2): 80-98.

- [48] R. Stokstad, Y. Eisen, S. Kaplanis, *et al.* Fusion of $^{16}\text{O} + ^{148,150,152,154}\text{Sm}$ at sub-barrier energies[J]. *Physical Review C*, 1980, **21**(6): 2427.
- [49] M. Beckerman. Sub-barrier fusion of two nuclei[J]. *Reports on Progress in Physics*, 1988, **51**(8): 1047.
- [50] R. Pengo, D. Evers, K. Löbner, *et al.* Nuclear structure effects in sub-barrier fusion cross sections[J]. *Nuclear Physics A*, 1983, **411**(2): 255-274.
- [51] R. Broglia, C. Dasso, S. Landowne, *et al.* Estimate of enhancements in sub-barrier heavy-ion fusion cross sections due to coupling to inelastic and transfer reaction channels[J]. *Physics Letters B*, 1983, **133**(1-2): 34-38.
- [52] T. Murakami, C.-C. Sahm, R. Vandenbosch, *et al.* Fission probes of sub-barrier fusion cross section enhancements and spin distribution broadening[J]. *Physical Review C*, 1986, **34**(4): 1353.
- [53] C. Aguiar, A. Aleixo, V. Barbosa, *et al.* Systematic study of sub-barrier fusion enhancement in heavy-ion reactions[J]. *Nuclear Physics A*, 1989, **500**(1): 195-211.
- [54] R. Lindsay, N. Rowley. Approximate treatment of coupled-channels effects in sub-barrier fusion[J]. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, 1984, **10**(6): 805.
- [55] Q. Haider, B. Cujec. Description of sub-barrier fusion cross sections by the proximity potential[J]. *Nuclear Physics A*, 1984, **429**(1): 116-138.
- [56] K. Hagino, N. Rowley, A. Kruppa. A program for coupled-channel calculations with all order couplings for heavy-ion fusion reactions[J]. *Computer Physics Communications*, 1999, **123**(1-3): 143-152.
- [57] B. L. Henry, W. E. Knight. What Matters in the University Graduation of Community College Transfer Students.[J]. 2000.
- [58] C. Morton, A. Berriman, M. Dasgupta, *et al.* Coupled-channels analysis of the $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ fusion barrier distribution[J]. *Physical Review C*, 1999, **60**(4): 044608.
- [59] A. Stefanini, L. Corradi, A. Vinodkumar, *et al.* Near-barrier fusion of $^{36}\text{S} + ^{90,96}\text{Zr}$: The effect of the strong octupole vibration of ^{96}Zr [J]. *Physical Review C*, 2000, **62**(1): 014601.
- [60] L. T. Baby, V. Tripathi, J. Das, *et al.* Role of ^{28}Si excitations in the sub-barrier fusion of $^{28}\text{Si} + ^{120}\text{Sn}$ [J]. *Physical Review C*, 2000, **62**(1): 014603.
- [61] F. Scarlassara, S. Beghini, G. Montagnoli, *et al.* Fusion of $^{40}\text{Ca} + ^{124}\text{Sn}$ around the Coulomb barrier[J]. *Nuclear Physics A*, 2000, **672**(1-4): 99-110.
- [62] K. Siwek-Wilczyńska, J. Wilczyński. Empirical nucleus-nucleus potential deduced from fusion excitation functions[J]. *Physical Review C*, 2004, **69**(2): 024611.
- [63] B. Wang, K. Wen, W.-J. Zhao, *et al.* Systematics of capture and fusion dynamics in heavy-ion collisions[J]. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 2017, **114**: 281-370.

- [64] C. Jiang, B. P. Kay. Heavy-ion fusion cross section formula and barrier height distribution [J]. *Physical Review C*, 2022, **105**(6): 064601.
- [65] N. Wang, Z. Li, W. Scheid. Systematic study of fusion barriers[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2007, **34**(9): 1935-1953.
- [66] D. Gross, H. Kalinowski. On the mechanism of heavy ion collision leading to a compound system and to deep inelastic reactions[J]. *Physics Letters B*, 1974, **48**(4): 302-306.
- [67] B. Gatty, D. Guerreau, M. Lefort, *et al.* Deep inelastic collisions in the interaction of 280 MeV ^{40}Ar with ^{58}Ni [J]. *Nuclear Physics A*, 1975, **253**(2): 511-532.
- [68] K. Siwek-Wilczyńska, J. Wilczyński. A phenomenological model of deep-inelastic collisions between complex nuclei[J]. *Nuclear Physics A*, 1976, **264**(1): 115-131.
- [69] V. V. Volkov. Deep inelastic transfer reactions—the new type of reactions between complex nuclei[J]. *Physics Reports*, 1978, **44**(2): 93-157.
- [70] J. Péter, C. Ngô, B. Tamain. Quasi-fission reactions induced by 365 MeV ^{63}Cu ions on a ^{197}Au target[J]. *Journal de Physique Lettres*, 1975, **36**(2): 23-27.
- [71] R. Bock, Y. Chu, M. Dakowski, *et al.* Dynamics of the fusion process[J]. *Nuclear Physics A*, 1982, **388**(2): 334-380.
- [72] B. Back, R. Betts, K. Cassidy, *et al.* Experimental signatures of quasifission reactions[J]. *Physical Review Letters*, 1983, **50**(11): 818.
- [73] J. Töke, R. Bock, G. Dai, *et al.* Quasi-fission—the mass-drift mode in heavy-ion reactions [J]. *Nuclear Physics A*, 1985, **440**(2): 327-365.
- [74] W. Shen, J. Albinski, A. Gobbi, *et al.* Fission and quasifission in U-induced reactions[J]. *Physical Review C*, 1987, **36**(1): 115.
- [75] Y. Y. Jiang, N. Wang, Z. X. Li, *et al.* Dynamical nucleus-nucleus potential at short distances[J]. *Physical Review C*, 2010, **81**(4): 044602.
- [76] L. Zhu, J. Su, W. Xie, *et al.* Study of the dynamical potential barriers in heavy ion collisions[J]. *Nuclear Physics A*, 2013, **915**: 90-105.
- [77] A. S. Umar, V. E. Oberacker. Heavy-ion interaction potential deduced from density-constrained time-dependent Hartree-Fock calculation[J]. *Physical Review C*, 2006, **74**(2): 021601.
- [78] K. Washiyama, D. Lacroix. Energy dependence of the nucleus-nucleus potential close to the Coulomb barrier[J]. *Physical Review C*, 2008, **78**(2): 024610.
- [79] S. E. Koonin. The time-dependent Hartree-Fock description of heavy-ion collisions[G] //Heavy ion interactions at high energies. 1980.
- [80] P. Bonche, S. Koonin, J. Negele. One-dimensional nuclear dynamics in the time-dependent Hartree-Fock approximation[J]. *Physical Review C*, 1976, **13**(3): 1226.

- [81] P. Stevenson, M. Barton. Low-energy heavy-ion reactions and the Skyrme effective interaction[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2019, **104**: 142-164.
- [82] C. Simenel, A. Umar. Heavy-ion collisions and fission dynamics with the time-dependent Hartree-Fock theory and its extensions[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2018, **103**: 19-66.
- [83] C. Simenel, B. Avez, D. Lacroix. Microscopic approaches for nuclear Many-Body dynamics: applications to nuclear reactions[J]. arXiv:0806.2714 [nucl-ex, physics:nucl-th], 2009.
- [84] C. Simenel. Nuclear quantum many-body dynamics: From collective vibrations to heavy-ion collisions[J]. The European Physical Journal A, 2012, **48**(11): 152.
- [85] J. Bartel, K. Bencheikh. Nuclear mean fields through self-consistent semiclassical calculations[J]. The European Physical Journal A, 2002, **14**(2): 179-190.
- [86] J. Tian, X. Wu, Z. Li. Study on dynamic fusion barrier in heavy-ion fusion reactions[J]. Chinese Physics C, 2006, **30**(5): 428-434.
- [87] Z. Q. Feng, G. M. Jin, F. S. Zhang. Dynamical analysis on heavy-ion fusion reactions near Coulomb barrier[J]. Nuclear Physics A, 2008, **802**(1-4): 91-106.
- [88] Z. Q. Feng, G. M. Jin. Fusion dynamics of symmetric systems near barrier energies[J]. Physical Review C, 2009, **80**(3): 037601.
- [89] R. Y. Cusson, P. .-. Reinhard, M. R. Strayer, *et al.* Density as a constraint and the separation of internal excitation energy in TDHF[J]. Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei, 1985, **320**(3): 475-482.
- [90] A. S. Umar, V. E. Oberacker, J. A. Maruhn, *et al.* Microscopic Calculation of Pre-Compound Excitation Energies for Heavy-Ion Collisions[J]. Physical Review C, 2009, **80**(4): 041601.
- [91] G. Scamps, Y. Hashimoto. Density-constrained time-dependent Hartree-Fock-Bogoliubov method[J]. Physical Review C, 2019, **100**(2): 024623.
- [92] C. Simenel, A. Umar, K. Godbey, *et al.* How the Pauli exclusion principle affects fusion of atomic nuclei[J]. Physical Review C, 2017, **95**(3): 031601.
- [93] C. Simenel, A. Wakhle, B. Avez, *et al.* Effects of nuclear structure on quasi-fission[J]. EPJ Web of Conferences, 2012, **38**: 09001.
- [94] A. S. Umar, V. E. Oberacker, C. Simenel. Fusion and quasifission dynamics in the reactions $^{48}\text{Ca}+^{249}\text{Bk}$ and $^{50}\text{Ti}+^{249}\text{Bk}$ using TDHF[J]. Physical Review C, 2016, **94**(2): 024605.
- [95] A. S. Umar, V. E. Oberacker, C. Simenel. Shape evolution and collective dynamics of quasifission in the time-dependent hartree-fock approach[J]. Physical Review C, 2015, **92**(2): 024621.

- [96] K. Godbey, A. S. Umar. Quasifission dynamics in microscopic theories[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, **8**: 40.
- [97] L. Guo, C. Shen, C. Yu, *et al.* Isotopic trends of quasifission and fusion-fission in the reactions $^{48}\text{Ca}+^{239,244}\text{Pu}$ [J]. *Physical Review C*, 2018, **98**(6): 064609.
- [98] J. Bell, T. Skyrme. CVIII. The nuclear spin-orbit coupling[J]. *Philosophical Magazine*, 1956, **1**(11): 1055-1068.
- [99] D. Gogny. Nuclear selfconsistent fields with the D1, S3, and Gogny forces. Application to light nuclei[J]. *Physical Review C*, 1981, **24**(6): 1490.
- [100] D. R. Hartree. The wave mechanics of an atom with a non-Coulomb central field. Part I. Theory and methods[C]//*Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*: vol. 24: 1. 1928: 89-110.
- [101] V. Fock. Approximation method for the solution of the quantum mechanical multibody problems[J]. *Z Angew Phys*, 1930, **61**: 126-148.
- [102] P. Hohenberg, W. Kohn. Inhomogeneous electron gas[J]. *Physical Review*, 1964, **136**(3B): B864.
- [103] W. Kohn, L. J. Sham. Self-consistent equations including exchange and correlation effects [J]. *Physical Review*, 1965, **140**(4A): A1133.
- [104] J. Negele, D. Vautherin. Density-matrix expansion for an effective nuclear hamiltonian [J]. *Physical Review C*, 1972, **5**(5): 1472.
- [105] J. Dobaczewski. Ab initio derivation of model energy density functionals[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2016, **43**(4): 04LT01.
- [106] E. Ruiz Arriola. Low scale saturation of effective NN interactions and their symmetries [J]. *Symmetry*, 2016, **8**(6): 42.
- [107] M. Bender, P.-H. Heenen, P.-G. Reinhard. Self-consistent mean-field models for nuclear structure[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2003, **75**(1): 121.
- [108] J. Erler, P. Klüpfel, P. Reinhard. Misfits in Skyrme–Hartree–Fock[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2010, **37**(6): 064001.
- [109] M. Dutra, O. Lourenço, J. S. Martins, *et al.* Skyrme interaction and nuclear matter constraints[J]. *Physical Review C*, 2012, **85**(3): 035201.
- [110] P. A. Dirac. Note on exchange phenomena in the Thomas atom[C]//*Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*: vol. 26: 3. 1930: 376-385.
- [111] K. Sekizawa. Microscopic description of production cross sections including deexcitation effects[J]. *Physical Review C*, 2017, **96**(1): 014615.

- [112] A. Umar, C. Simenel, W. Ye. Transport properties of isospin asymmetric nuclear matter using the time-dependent Hartree-Fock method[J]. *Physical Review C*, 2017, **96**(2): 024625.
- [113] K. Sekizawa, K. Yabana. Time-dependent Hartree-Fock calculations for multinucleon transfer and quasifission processes in the Ni 64+ U 238 reaction[J]. *Physical Review C*, 2016, **93**(5): 054616.
- [114] K. Sekizawa, K. Yabana. Time-dependent Hartree-Fock calculations for multinucleon transfer processes in $^{40,48}\text{Ca}+^{124}\text{Sn}$, $^{40}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$, and $^{58}\text{Ni}+^{208}\text{Pb}$ reactions[J]. *Physical Review C*, 2013, **88**(1): 014614.
- [115] C. Simenel, A. Umar. Formation and dynamics of fission fragments[J]. *Physical Review C*, 2014, **89**(3): 031601.
- [116] J. Aichelin, H. Stoecker. Quantum molecular dynamics—A novel approach to N-body correlations in heavy ion collisions[J]. *Physics Letters B*, 1986, **176**(1-2): 14-19.
- [117] J. Aichelin. “Quantum” molecular dynamics—a dynamical microscopic n-body approach to investigate fragment formation and the nuclear equation of state in heavy ion collisions [J]. *Physics Reports*, 1991, **202**(5-6): 233-360.
- [118] J. Aichelin, G. Peilert, A. Bohnet, *et al.* Quantum molecular dynamics approach to heavy ion collisions: Description of the model, comparison with fragmentation data, and the mechanism of fragment formation[J]. *Physical Review C*, 1988, **37**(6): 2451.
- [119] J. Aichelin, A. Rosenhauer, G. Peilert, *et al.* Importance of momentum-dependent interactions for the extraction of the nuclear equation of state from high-energy heavy-ion collisions[J]. *Physical Review letters*, 1987, **58**(19): 1926.
- [120] R. K. Puri, C. Hartnack, J. Aichelin. Early fragment formation in heavy-ion collisions[J]. *Physical Review C*, 1996, **54**(1): R28.
- [121] N. Wang, Z. Li, X. Wu. Improved quantum molecular dynamics model and its applications to fusion reaction near barrier[J]. *Physical Review C*, 2002, **65**(6): 064608.
- [122] N. Wang, L. Guo. New neutron-rich isotope production in $^{154}\text{Sm}+^{160}\text{Gd}$ [J]. *Physics Letters B*, 2016, **760**: 236-241.
- [123] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium[J]. *Physical Review*, 1932, **40**(5): 749.
- [124] D. Hinde, M. Dasgupta, E. Simpson. Experimental studies of the competition between fusion and quasifission in the formation of heavy and superheavy nuclei[J]. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, **118**: 103856.
- [125] T. Tanaka, K. Morita, K. Morimoto, *et al.* Study of Quasielastic Barrier Distributions as a Step towards the Synthesis of Superheavy Elements with Hot Fusion Reactions[J]. *Physical Review Letters*, 2020, **124**: 052502.

- [126] C. Simenel, P. McGlynn, A. Umar, *et al.* Comparison of fission and quasi-fission modes [J]. Physics Letters B, 2021, **822**: 136648.
- [127] K. Godbey, A. Umar, C. Simenel. Dependence of fusion on isospin dynamics[J]. Physical Review C, 2017, **95**(1): 011601.
- [128] L. Guo, T. Nakatsukasa. Time-dependent Hartree-Fock studies of the dynamical fusion threshold[C]//EPJ Web of Conferences: vol. 38. 2012: 09003.
- [129] A. Umar, C. Simenel, V. Oberacker. Energy dependence of potential barriers and its effect on fusion cross sections[J]. Physical Review C, 2014, **89**(3): 034611.
- [130] D. Bourgin, C. Simenel, S. Courtin, *et al.* Microscopic study of $^{40}\text{Ca} + ^{58,64}\text{Ni}$ fusion reactions[J]. Physical Review C, 2016, **93**(3): 034604.
- [131] Y. R. X. Chen, H. Yao, M. Liu, *et al.* Systematic study of fusion barriers with energy dependent barrier radius[J]. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2023, **154**: 101587.
- [132] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, *et al.* A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities[J]. Nuclear Physics A, 1998, **635**(1-2): 231-256.
- [133] N. Wang, M. Liu, X. Z. Wu, *et al.* Surface diffuseness correction in global mass formula [J]. Physics Letters B, 2014, **734**: 215-219.
- [134] K. Y. Zhang, M. K. Cheoun, Y. B. Choi, *et al.* Nuclear mass table in deformed relativistic Hartree–Bogoliubov theory in continuum, I: Even–even nuclei[J]. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 2022, **144**: 101488.
- [135] D. Pigg, A. Umar, V. Oberacker. Eulerian rotations of deformed nuclei for TDDFT calculations[J]. Computer Physics Communications, 2014, **185**(5): 1410-1414.
- [136] K. Hagino, N. Takigawa. Subbarrier fusion reactions and many-particle quantum tunneling[J]. Progress of theoretical physics, 2012, **128**(6): 1061-1106.
- [137] H. Albers, J. Khuyagbaatar, D. Hinde, *et al.* Zeptosecond contact times for element $Z=120$ synthesis[J]. Physics Letters B, 2020, **808**: 135626.
- [138] A. Sen, T. Ghosh, E. Kozulin, *et al.* Quasifission in ^{84}Kr , 86-induced reactions populating superheavy elements[J]. Physical Review C, 2022, **105**(1): 014627.
- [139] C. Li, C. A. Sokhna, X. Xu, *et al.* Isospin equilibration in multinucleon transfer reaction at near-barrier energies[J]. Physical Review C, 2019, **99**(3): 034619.
- [140] Z. J. Wu, L. Guo, *et al.* Microscopic studies of production cross sections in multinucleon transfer reaction $^{58}\text{Ni} + ^{124}\text{Sn}$ [J]. Physical Review C, 2019, **100**(1): 014612.
- [141] X. Sun, L. Guo, *et al.* Microscopic study of compound-nucleus formation in cold-fusion reactions[J]. Physical Review C, 2022, **105**(5): 054610.

- [142] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, *et al.* A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise[C]//kdd: vol. 96: 34. 1996: 226-231.
- [143] C. Jiang, A. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Fusion hindrance for $\text{Ca} + \text{Ca}$ systems: Influence of neutron excess[J]. Physical Review C, 2010, **82**(4): 041601.
- [144] M. Trotta, A. M. Stefanini, L. Corradi, *et al.* Sub-barrier fusion of the magic nuclei $^{40,48}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$ [J]. Physical Review C, 2001, **65**(1): 011601.
- [145] M. Dasgupta, D. Hinde, A. Diaz-Torres, *et al.* Beyond the coherent coupled channels description of nuclear fusion[J]. Physical review letters, 2007, **99**(19): 192701.
- [146] C. R. Morton, A. C. Berriman, M. Dasgupta, *et al.* Coupled-channels analysis of the $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ fusion barrier distribution[J]. Physical Review C, 1999, **60**: 044608.
- [147] X. J. S. Y. Long, H. Y. Peng. The statistical law of the first excitation energy of atomic nuclei[J]. Nuclear Physics Review, 2019, **36**(4): 6.
- [148] [https://www.nndc.bnl.gov/\[EB\]](https://www.nndc.bnl.gov/[EB]).
- [149] I. Dutt, R. K. Puri. Systematic study of the fusion barriers using different proximity-type potentials for $N = Z$ colliding nuclei: New extensions[J]. Physical Review C, 2010, **81**(4): 044615.
- [150] A. Dobrowolski, K. Pomorski, J. Bartel. Mean-field description of fusion barriers with Skyrme's interaction[J]. Nuclear Physics A, 2003, **729**(2-4): 713-725.
- [151] R. Bass. Fusion of heavy nuclei in a classical model[J]. Nuclear Physics A, 1974, **231**(1): 45-63.
- [152] K. Rehm. Quasi-elastic heavy-ion collisions[J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 1991, **41**(1): 429-468.
- [153] N. Wang, W. Scheid. Quasi-elastic scattering and fusion with a modified Woods-Saxon potential[J]. Physical Review C, 2008, **78**(1): 014607.
- [154] P. W. Wen, C. J. Lin, H. M. Jia, *et al.* New Coulomb barrier scaling law with reference to the synthesis of superheavy elements[J]. Physical Review C, 2022, **105**(3): 034606.
- [155] C. Simenel, B. Avez. Time-dependent Hartree-Fock description of heavy ions fusion[J]. International Journal of Modern Physics E, 2008, **17**(01): 31-40.
- [156] R. Wolski. Compound nucleus aspect of sub-barrier fusion: A new energy scaling behavior[J]. Physical Review C, 2013, **88**(4): 041603.
- [157] M. Dasgupta, K. Hagino, C. Morton, *et al.* Evidence of double phonon excitations in $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ reaction[J]. arXiv preprint nucl-ex/9707004, 1997, **23**: 1491-1496.
- [158] H. Timmers, D. Ackermann, S. Beghini, *et al.* A case study of collectivity, transfer and fusion enhancement[J]. Nuclear Physics A, 1998, **633**(3): 421-445.

- [159] Khushboo, S. Mandal, S. Nath, *et al.* Relationship between and effect of inelastic excitations and transfer channels on sub-barrier fusion enhancement[J]. Physical Review C, 2017, **96**(1): 014614.
- [160] J. J. Kolata, A. Roberts, A. M. Howard, *et al.* Fusion of $^{124,132}\text{Sn}$ with $^{40,48}\text{Ca}$ [J]. Physical Review C, 2012, **85**: 054603.
- [161] K. Godbey, A. Umar, C. Simenel. Theoretical uncertainty quantification for heavy-ion fusion[J]. Physical Review C, 2022, **106**(5): L051602.
- [162] A. A. Bogachev, E. M. Kozulin, G. N. Knyazheva, *et al.* Asymmetric and symmetric fission of excited nuclei of $^{180,190}\text{Hg}$ and $^{184,192,202}\text{Pb}$ formed in the reactions with ^{36}Ar and $^{40,48}\text{Ca}$ ions[J]. Physical Review C, 2021, **104**: 024623.
- [163] I. M. Itkis, E. M. Kozulin, M. G. Itkis, *et al.* Fission and quasifission modes in heavy-ion-induced reactions leading to the formation of Hs^* [J]. Physical Review C, 2011, **83**: 064613.
- [164] K. V. Novikov, E. M. Kozulin, G. N. Knyazheva, *et al.* Investigation of fusion probabilities in the reactions with $^{52,54}\text{Cr}$, ^{64}Ni , and ^{68}Zn ions leading to the formation of $Z = 120$ superheavy composite systems[J]. Physical Review C, 2020, **102**: 044605.
- [165] K. Banerjee, D. J. Hinde, M. Dasgupta, *et al.* Mechanisms Suppressing Superheavy Element Yields in Cold Fusion Reactions[J]. Physical Review Letters, 2019, **122**: 232503.
- [166] D. J. Hinde, D. Hilscher, H. Rossner, *et al.* Neutron emission as a probe of fusion-fission and quasifission dynamics[J]. Physical Review C, 1992, **45**: 1229-1259.
- [167] E. M. Kozulin, G. N. Knyazheva, T. K. Ghosh, *et al.* Fission and quasifission of the composite system $Z = 114$ formed in heavy-ion reactions at energies near the Coulomb barrier[J]. Physical Review C, 2019, **99**: 014616.
- [168] E. M. Kozulin, G. N. Knyazheva, I. M. Itkis, *et al.* Fusion-fission and quasifission of superheavy systems with $Z = 110 - 116$ formed in ^{48}Ca -induced reactions[J]. Physical Review C, 2014, **90**: 054608.
- [169] G. Adamian, N. Antonenko, W. Scheid, *et al.* Treatment of competition between complete fusion and quasifission in collisions of heavy nuclei[J]. Nuclear Physics A, 1997, **627**(2): 361-378.
- [170] N. Wang, J. Tian, W. Scheid. Systematics of fusion probability in “hot” fusion reactions [J]. Physical Review C, 2011, **84**: 061601.
- [171] H. Timmers, L. Corradi, A. Stefanini, *et al.* Strong isotopic dependence of the fusion of $^{40}\text{Ca}+^{90,96}\text{Zr}$ [J]. Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 1997, **399**(1): 35-39.

- [172] H. Q. Zhang, C. J. Lin, F. Yang, *et al.* Near-barrier fusion of $^{32}\text{S} + ^{90,96}\text{Zr}$: The effect of multi-neutron transfers in sub-barrier fusion reactions[J]. *Physical Review C*, 2010, **82**: 054609.
- [173] J. Bartel, P. Quentin, M. Brack, *et al.* Towards a better parametrisation of Skyrme-like effective forces: A critical study of the SkM force[J]. *Nuclear Physics A*, 1982, **386**(1): 79-100.
- [174] N. Wang, L. Ou, Y. Zhang, *et al.* Microscopic dynamics simulations of heavy-ion fusion reactions induced by neutron-rich nuclei[J]. *Physical Review C*, 2014, **89**: 064601.
- [175] N. Wang, M. Liu, X. Z. Wu, *et al.* Surface diffuseness correction in global mass formula [J]. *Physics Letters B*, 2014, **734**: 215-219.
- [176] K. Rehm, H. Essel, P. Sperr, *et al.* Dissipative collisions of heavy ions at energies close to the Coulomb barrier[J]. *Nuclear Physics A*, 1981, **366**(3): 477-519.
- [177] P. W. Wen, C. J. Lin, R. G. Nazmitdinov, *et al.* Potential roots of the deep subbarrier heavy-ion fusion hindrance phenomenon within the sudden approximation approach[J]. *Physical Review C*, 2021, **103**: 054601.
- [178] M. G. Itkis, A. A. Bogatchev, I. M. Itkis, *et al.* Fusion-fission of Superheavy Nuclei[J]. *Journal of Nuclear and Radiochemical Sciences*, 2002, **3**(1): 57-61.
- [179] M. G. Itkis, A. A. Bogatchev, I. M. Itkis, *et al.* Fusion-fission of Superheavy Nuclei[J]. *Journal of Nuclear and Radiochemical Sciences*, 2002, **3**(1): 57-61.
- [180] R. Bock, Y. Chu, M. Dakowski, *et al.* Dynamics of the fusion process[J]. *Nuclear Physics A*, 1982, **388**(2): 334-380.
- [181] W. Swiatecki. The dynamics of the fusion of two nuclei[J]. *Nuclear Physics A*, 1982, **376**(2): 275-291.
- [182] C. Li, J. Tian, F.-S. Zhang. Production mechanism of the neutron-rich nuclei in multinucleon transfer reactions: A reaction time scale analysis in energy dissipation process[J]. *Physics Letters B*, 2020, **809**: 135697.
- [183] N. Wang, K. Zhao, W. Scheid, *et al.* Fusion-fission reactions with a modified Woods-Saxon potential[J]. *Physical Review C*, 2008, **77**(1): 014603.
- [184] N. Wang, J. Tian, W. Scheid. Systematics of fusion probability in “hot” fusion reactions [J]. *Physical Review C*, 2011, **84**(6): 061601.
- [185] W. D. Myers, W. J. Swiatecki. Nuclear masses and deformations[J]. *Nuclear Physics*, 1966, **81**(1): 1-60.
- [186] W. Reisdorf. Heavy-ion reactions close to the Coulomb barrier[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1994, **20**(9): 1297.
- [187] R. Bass. Threshold and angular momentum limit in the complete fusion of heavy ions[J]. *Physics Letters B*, 1973, **47**(2): 139-142.

- [188] P. Christensen, A. Winther. The evidence of the ion-ion potentials from heavy ion elastic scattering[J]. Physics Letters B, 1976, **65**(1): 19-22.
- [189] P.-G. Reinhard, B. Schuetrumpf, J. Maruhn. The Axial Hartree-Fock + BCS Code SkyAx [J]. Computer Physics Communications, 2021, **258**: 107603.
- [190] V. E. Oberacker, A. S. Umar, R. Kesper. Microscopic DC-TDHF study of heavy-ion potentials and fusion cross sections[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2013, **420**: 012132.
- [191] C. Simenel, M. Dasgupta, D. J. Hinde, *et al.* Microscopic approach to coupled-channels effects on fusion[J]. Phys. Rev. C, 2013, **88**: 064604.
- [192] D. Bourgin, C. Simenel, S. Courtin, *et al.* Microscopic study of $^{40}\text{Ca} + ^{58,64}\text{Ni}$ fusion reactions[J]. Phys. Rev. C, 2016, **93**: 034604.
- [193] K.-H. Kim, T. Otsuka, P. Bonche. Three-dimensional TDHF calculations for reactions of unstable nuclei[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 1997, **23**(10): 1267.
- [194] B. Dropesky, G. Butler, C. Orth, *et al.* Excitation Functions for the Reactions C 12 ($\pi\pm$, π N) C 11 over the Region of the (3, 3) Resonance[J]. Physical Review Letters, 1975, **34**(13): 821.
- [195] Y. T. Oganessian, F. S. Abdullin, C. Alexander, *et al.* Experimental studies of the $^{249}\text{Bk} + ^{48}\text{Ca}$ reaction including decay properties and excitation function for isotopes of element 117, and discovery of the new isotope ^{277}Mt [J]. Physical Review C, 2013, **87**(5): 054621.
- [196] R. Siemssen, J. Maher, A. Weidinger, *et al.* Excitation-Function Structure in O 16+ O 16 Scattering[J]. Physical Review Letters, 1967, **19**(7): 369.
- [197] <http://nrv.jinr.ru/nrv/webnrv/fusion/reactions.php?REACTION=ALL&ORDER=PT>[EB].
- [198] J. F. Liang, D. Shapira, J. R. Beene, *et al.* Fusion of radioactive ^{132}Sn with ^{64}Ni [J]. Physical Review C, 2007, **75**(5): 054607.
- [199] Ş. Mişicu, H. Esbensen. Hindrance of heavy-ion fusion due to nuclear incompressibility [J]. Physical review letters, 2006, **96**(11): 112701.
- [200] H. Esbensen, Ş. Mişicu. Hindrance of $^{16}\text{O} + ^{208}\text{Pb}$ fusion at extreme sub-barrier energies [J]. Physical Review C, 2007, **76**(5): 054609.
- [201] Y. J. Qin, J. L. Tian, Y. X. Yang, *et al.* Calculation of penetration probability across an arbitrary potential barrier in fusion reactions[J]. Physical Review C, 2012, **85**(5): 054623.
- [202] H. A. Aljuwair, R. J. Ledoux, M. Beckerman, *et al.* Isotopic effects in the fusion of ^{40}Ca with $^{40,44,48}\text{Ca}$ [J]. Physical Review C, 1984, **30**: 1223-1227.
- [203] G. Montagnoli, A. M. Stefanini, C. L. Jiang, *et al.* Fusion of $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ and other Ca + Ca systems near and below the barrier[J]. Physical Review C, 2012, **85**: 024607.

- [204] J. J. Kolata, A. Roberts, A. M. Howard, *et al.* Fusion of $^{124,132}\text{Sn}$ with $^{40,48}\text{Ca}$ [J]. *Physical Review C*, 2012, **85**: 054603.
- [205] D. Vermeulen, H.-G. Clerc, C.-C. Sahm, *et al.* Cross sections for evaporation residue production near the $N=126$ shell closure[J]. *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, 1984, **318**: 157-169.
- [206] W. Reisdorf, M. Schädel. How well do we understand the synthesis of heavy elements by heavy-ion induced fusion?[J]. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 1992, **343**: 47-57.
- [207] R. G. Stokstad, Z. E. Switkowski, R. A. Dayras, *et al.* Measurements of Fusion Cross Sections for Heavy-Ion Systems at Very Low Energies[J]. *Physical Review Letters*, 1976, **37**: 888-891.
- [208] B. Dasmahapatra, B. Čujec. Measurement of cross sections for $^{12}\text{C}+^{14}\text{C}$ reaction at sub-barrier energies[J]. *Nuclear Physics A*, 1993, **565**(3): 657-670.
- [209] G. Hulke, C. Rolfs, H. Trautvetter. Comparison of the fusion reactions $^{12}\text{C}+^{20}\text{Ne}$ and $^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ near the Coulomb barrier[J]. *Zeitschrift für Physik A*, 1980, **297**(2): 161-183.
- [210] E. Bozek, D. De Castro-Rizzo, S. Cavallaro, *et al.* De-excitation of $^{58,60,62}\text{Ni}$ compound nuclei formed via symmetric and asymmetric entrance channels[J]. *Nuclear Physics A*, 1986, **451**(1): 171-188.
- [211] D. Abriola, A. A. Sonzogni, M. di Tada, *et al.* Fusion and elastic scattering for the $^{12}\text{C}+^{144}\text{Sm}$ system at energies near to the Coulomb barrier[J]. *Physical Review C*, 1992, **46**: 244-249.
- [212] A. Mukherjee, D. J. Hinde, M. Dasgupta, *et al.* Failure of the Woods-Saxon nuclear potential to simultaneously reproduce precise fusion and elastic scattering measurements[J]. *Physical Review C*, 2007, **75**: 044608.
- [213] M. L. Chatterjee, L. Potvin, B. Čujec. Fusion cross section for $^{13}\text{C}+^{13}\text{C}$ at low energies [J]. *Nuclear Physics A*, 1980, **333**(2): 273-284.
- [214] Z. Switkowski, R. Stokstad, R. Wieland. ^{14}N fusion with ^{13}C and ^{16}O at sub-barrier energies[J]. *Nuclear Physics A*, 1977, **279**(3): 502-516.
- [215] P. A. DeYoung, J. J. Kolata, L. J. Satkowiak, *et al.* Reaction cross sections for $^{14}\text{N}+^{14}\text{N}$ [J]. *Physical Review C*, 1982, **26**: 1482-1489.
- [216] Z. Switkowski, R. Stokstad, R. Wieland. Measurement of fusion cross sections for $^{14}\text{N}+^{14}\text{N}$ and $^{12}\text{C}+^{16}\text{O}$ at low energies[J]. *Nuclear Physics A*, 1976, **274**(1): 202-222.
- [217] P. Gomes, T. Penna, R. Liguori Neto, *et al.* Nuclear fusion between heavy ions by the gamma-ray spectroscopy method[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1989, **280**(2): 395-401.

- [218] H. Funaki, E. Arai. Anomaly in the $^{15}\text{N}, ^{16}\text{O}, ^{19}\text{F}+^{54,56}\text{Fe}$ fusion cross sections around the Coulomb barrier energy[J]. Nuclear Physics A, 1993, **556**(2): 307-316.
- [219] P. Christensen, Z. Switkowski, R. Dayras. Sub-barrier fusion measurements for $^{12}\text{C}+^{16}\text{O}$ [J]. Nuclear Physics A, 1977, **280**(1): 189-204.
- [220] B. Dasmahapatra, B. Čujec, I. Szöghy, *et al.* Cross section measurements for the $^{16}\text{O}+^{13}\text{C}$ reaction at subbarrier energies[J]. Nuclear Physics A, 1991, **526**(2): 395-406.
- [221] A. Kuronen, J. Keinonen, P. Tikkanen. Cross section of $^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ near the Coulomb barrier[J]. Physical Review C, 1987, **35**: 591-596.
- [222] J. Thomas, Y. T. Chen, S. Hinds, *et al.* Sub-barrier fusion of the oxygen isotopes: A more complete picture[J]. Physical Review C, 1986, **33**: 1679-1689.
- [223] R. L. Neto, J. Acquadro, P. Gomes, *et al.* Fusion of $^{16}\text{O} + ^{46,50}\text{Ti}$ near and below the coulomb barrier[J]. Nuclear Physics A, 1990, **512**(2): 333-344.
- [224] N. Keeley, J. Lilley, J. Wei, *et al.* Fusion excitation function measurements for the $^{16}\text{O}+^{58}\text{Ni}$ and $^{16}\text{O}+^{62}\text{Ni}$ systems[J]. Nuclear Physics A, 1998, **628**(1): 1-16.
- [225] E. F. Aguilera, J. J. Kolata, R. J. Tighe. Nuclear structure effects in the sub-barrier fusion of $^{16}\text{O} + ^{70,72,73,74,76}\text{Ge}$ [J]. Physical Review C, 1995, **52**: 3103-3113.
- [226] V. Tripathi, L. T. Baby, J. J. Das, *et al.* Isotopic dependence and channel coupling effects in the fusion of $^{16}\text{O}+^{112,116}\text{Sn}$ and $^{32}\text{S}+^{112,116,120}\text{Sn}$ at energies around the barrier[J]. Physical Review C, 2001, **65**: 014614.
- [227] E. Vulgaris, L. Grodzins, S. G. Steadman, *et al.* Fusion, transfer, and elastic scattering at sub-barrier energies for $^{16,18}\text{O}$ ions on ^{208}Pb and ^{15}N and ^{16}O ions on ^{209}Bi [J]. Physical Review C, 1986, **33**: 2017-2027.
- [228] Y. Eyal, M. Beckerman, R. Chechik, *et al.* Nuclear size and boundary effects on the fusion barrier of oxygen with carbon[J]. Physical Review C, 1976, **13**: 1527-1535.
- [229] T. K. Steinbach, J. Vadas, J. Schmidt, *et al.* Sub-barrier enhancement of fusion as compared to a microscopic method in $^{18}\text{O} + ^{12}\text{C}$ [J]. Physical Review C, 2014, **90**: 041603.
- [230] A. M. Borges, C. P. da Silva, D. Pereira, *et al.* Pair transfer and the sub-barrier fusion of $^{18}\text{O}+^{58}\text{Ni}$ [J]. Physical Review C, 1992, **46**: 2360-2363.
- [231] C. P. Silva, D. Pereira, L. C. Chamon, *et al.* Fusion and peripheral processes in the $^{16,18}\text{O}+^{58,60,64}\text{Ni}$ systems[J]. Physical Review C, 1997, **55**: 3155-3158.
- [232] E. Piasecki, Ł. Świdorski, N. Keeley, *et al.* Smoothing of structure in the fusion and quasielastic barrier distributions for the $^{20}\text{Ne} + ^{208}\text{Pb}$ system[J]. Physical Review C, 2012, **85**: 054608.
- [233] S. Gary, C. Volant. Fusion and compound nuclei decay for light and intermediate-mass systems: $^{24}\text{Mg}, ^{28}\text{Si}+^{12}\text{C}, ^{24}\text{Mg}+^{24,26}\text{Mg}, ^{28}\text{Si}+^{24}\text{Mg}, ^{28,29,30}\text{Si}$ [J]. Physical Review C, 1982, **25**: 1877-1895.

- [234] C. L. Jiang, A. M. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Fusion Hindrance for a Positive- Q -Value System $^{24}\text{Mg} + ^{30}\text{Si}$ [J]. *Physical Review Letters*, 2014, **113**: 022701.
- [235] A. Morsad, J. J. Kolata, R. J. Tighe, *et al.* Sub-barrier fusion of $^{28,30}\text{Si}$ with $^{24,26}\text{Mg}$ [J]. *Physical Review C*, 1990, **41**: 988-994.
- [236] G. Montagnoli, A. M. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Fusion of $^{28}\text{Si} + ^{28,30}\text{Si}$: Different trends at sub-barrier energies[J]. *Physical Review C*, 2014, **90**: 044608.
- [237] C. L. Jiang, B. B. Back, H. Esbensen, *et al.* Fusion hindrance for a positive Q -value system [J]. *Physical Review C*, 2008, **78**: 017601.
- [238] A. M. Stefanini, G. Fortuna, A. Tivelli, *et al.* Sub-barrier fusion of $^{28,30}\text{Si}$ with $^{58,62,64}\text{Ni}$ [J]. *Physical Review C*, 1984, **30**: 2088-2091.
- [239] A. Stefanini, G. Fortuna, R. Pengo, *et al.* Heavy-ion fusion below the Coulomb barrier: The systems $^{28,30}\text{Si} + ^{58,62,64}\text{Ni}$ and $^{32,34,36}\text{S} + ^{58,64}\text{Ni}$ [J]. *Nuclear Physics A*, 1986, **456**(3): 509-534.
- [240] C. Jiang, B. Back, H. Esbensen, *et al.* First evidence of fusion hindrance for a small Q -value system[J]. *Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology*, 2006, **640**(1): 18-22.
- [241] A. K. Sinha, L. T. Baby, N. Badiger, *et al.* Sub-barrier few-nucleon transfer reaction and channel coupling effects in heavy ion fusion[J]. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1997, **23**(10): 1331.
- [242] M. Dasgupta, A. Navin, Y. K. Agarwal, *et al.* Fusion of $^{28}\text{Si} + ^{68}\text{Zn}$, $^{32}\text{S} + ^{64}\text{Ni}$, $^{37}\text{Cl} + ^{59}\text{Co}$ and $^{45}\text{Sc} + ^{51}\text{V}$ in the vicinity of the Coulomb barrier[J]. *Nuclear Physics A*, 1992, **539**(2): 351-369.
- [243] M. Dasgupta, A. Navin, Y. K. Agarwal, *et al.* Consistency of angular momentum and cross section in near-barrier fusion of $^{28}\text{Si} + ^{68}\text{Zn}$, $^{32}\text{S} + ^{64}\text{Ni}$, and $^{37}\text{Cl} + ^{59}\text{Co}$ [J]. *Physical Review Letters*, 1991, **66**: 1414-1417.
- [244] S. Kalkal, S. Mandal, N. Madhavan, *et al.* Channel coupling effects on the fusion excitation functions for $^{28}\text{Si} + ^{90,94}\text{Zr}$ in sub- and near-barrier regions[J]. *Physical Review C*, 2010, **81**: 044610.
- [245] D. Hinde, C. Morton, M. Dasgupta, *et al.* Competition between fusion-fission and quasi-fission in the reaction $^{28}\text{Si} + ^{208}\text{Pb}$ [J]. *Nuclear Physics A*, 1995, **592**(2): 271-289.
- [246] A. Menchaca-Rocha, E. Belmont-Moreno, M. E. Brandan, *et al.* Search for a valence-neutron-induced enhancement in the sub-barrier fusion of $^{32}\text{S} + ^{12,13}\text{C}$ [J]. *Physical Review C*, 1990, **41**: 2654-2657.
- [247] G. M. Berkowitz, P. Braun-Munzinger, J. S. Karp, *et al.* Fusion near and below the barrier for the systems $^{32,34}\text{S} + ^{24,25,26}\text{Mg}$ and $^{32}\text{S} + ^{27}\text{Al}$ [J]. *Physical Review C*, 1983, **28**: 667-678.

- [248] G. Montagnoli, A. M. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Effects of transfer channels on near- and sub-barrier fusion of $^{32}\text{S} + ^{48}\text{Ca}$ [J]. *Physical Review C*, 2013, **87**: 014611.
- [249] R. J. Tighe, J. J. Vega, E. Aguilera, *et al.* Sub-barrier fusion and elastic scattering in S + Ni systems[J]. *Physical Review C*, 1990, **42**: 1530-1539.
- [250] A. Stefanini, G. Fortuna, R. Pengo, *et al.* Influence of different reaction channels on the subbarrier fusion of $^{32,36}\text{S}$ with $^{58,64}\text{Ni}$ [J]. *Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology*, 1985, **162**(1): 66-70.
- [251] S. Gil, F. Hasenbalg, J. E. Testoni, *et al.* Fusion cross sections in systems leading to ^{170}Hf at near-barrier energies[J]. *Physical Review C*, 1995, **51**: 1336-1344.
- [252] J. Khuyagbaatar, K. Nishio, S. Hofmann, *et al.* Evidence for hindrance in fusion between sulfur and lead nuclei[J]. *Physical Review C*, 2012, **86**: 064602.
- [253] A. M. Stefanini, G. Montagnoli, R. Silvestri, *et al.* Fusion of the positive Q-value system $^{36}\text{S} + ^{48}\text{Ca}$ well below the Coulomb barrier[J]. *Physical Review C*, 2008, **78**: 044607.
- [254] G. Montagnoli, S. Beghini, B. Guiot, *et al.* Fusion of the positive Q-value system $^{36}\text{S} + ^{48}\text{Ca}$ [C]//: vol. 1098: 1. 2009: 38-43.
- [255] G. Montagnoli, A. M. Stefanini, L. Corradi, *et al.* Sub-barrier fusion of $^{36}\text{S} + ^{64}\text{Ni}$ and other medium-light systems[J]. *Physical Review C*, 2010, **82**: 064609.
- [256] A. M. Stefanini, L. Corradi, A. M. Vinodkumar, *et al.* Near-barrier fusion of $^{36}\text{S} + ^{90,96}\text{Zr}$: The effect of the strong octupole vibration of ^{96}Zr [J]. *Physical Review C*, 2000, **62**: 014601.
- [257] R. Pengo, D. Evers, K. Löbner, *et al.* Nuclear structure effects in sub-barrier fusion cross sections[J]. *Nuclear Physics A*, 1983, **411**(2): 255-274.
- [258] S. Cavallaro, M. Sperduto, B. Delaunay, *et al.* Sub-barrier fusion induced by ^{35}Cl and ^{37}Cl beams on $^{24,25,26}\text{Mg}$ isotopes[J]. *Nuclear Physics A*, 1990, **513**(1): 174-186.
- [259] W. Scobel, H. H. Gutbrod, M. Blann, *et al.* Fusion and interaction barrier parameters and critical angular momenta from ^{35}Cl -induced reactions[J]. *Physical Review C*, 1976, **14**: 1808-1823.
- [260] W. Scobel, A. Mignerey, M. Blann, *et al.* Barrier penetrability and/or deformation effects in ^{35}Cl induced fusion on $^{58,60,62,64}\text{Ni}$ [J]. *Physical Review C*, 1975, **11**: 1701-1706.
- [261] E. Martínez-Quiroz, E. F. Aguilera, J. J. Kolata, *et al.* Sub-barrier fusion of $^{37}\text{Cl} + ^{70,72,73,74,76}\text{Ge}$ [J]. *Physical Review C*, 2001, **63**: 054611.
- [262] W. Reisdorf, F. Hessberger, K. Hildenbrand, *et al.* Fusion near the threshold: A comparative study of the systems $^{40}\text{Ar} + ^{112,116,122}\text{Sn}$ and $^{40}\text{Ar} + ^{144,148,154}\text{Sm}$ [J]. *Nuclear Physics A*, 1985, **438**(1): 212-252.
- [263] R. Stokstad, W. Reisdorf, K. Hildenbrand, *et al.* The sub-barrier fusion of ^{40}Ar with $^{144,148,154}\text{Sm}$ [J]. *Zeitschrift für Physik A*, 1980, **295**: 269-286.

- [264] H.-G. Clerc, J. Keller, C.-C. Sahm, *et al.* Fusion-fission and neutron-evaporation-residue cross-sections in ^{40}Ar – and ^{50}Ti -induced fusion reactions[J]. Nuclear Physics A, 1984, **419**(3): 571-588.
- [265] C. L. Jiang, A. M. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Fusion hindrance for Ca+Ca systems: Influence of neutron excess[J]. Physical Review C, 2010, **82**: 041601.
- [266] R. Vandenbosch, A. A. Sonzogni, J. D. Bierman. Effects of shape and transfer degrees of freedom on sub-barrier fusion[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 1997, **23**(10): 1303.
- [267] B. Sikora, J. Bisplinghoff, W. Scobel, *et al.* Fusion of $^{58,60,62}\text{Ni}$ with 113-170 MeV ^{40}Ca ions[J]. Physical Review C, 1979, **20**: 2219-2226.
- [268] D. Bourgin, S. Courtin, F. Haas, *et al.* Barrier distributions and signatures of transfer channels in the $^{40}\text{Ca} + ^{58,64}\text{Ni}$ fusion reactions at energies around and below the Coulomb barrier[J]. Physical Review C, 2014, **90**: 044610.
- [269] H. Timmers, D. Ackermann, S. Beghini, *et al.* A case study of collectivity, transfer and fusion enhancement[J]. Nuclear Physics A, 1998, **633**(3): 421-445.
- [270] A. Stefanini, G. Montagnoli, H. Esbensen, *et al.* Fusion of $^{40}\text{Ca} + ^{96}\text{Zr}$ revisited: Transfer couplings and hindrance far below the barrier[J]. Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 2014, **728**: 639-644.
- [271] A. M. Stefanini. Low-energy surface vibrations and neutron transfer initiating heavy-ion sub-barrier fusion[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 1997, **23**(10): 1401.
- [272] F. Scarlassara, S. Beghini, G. Montagnoli, *et al.* Fusion of $^{40}\text{Ca} + ^{124}\text{Sn}$ around the Coulomb barrier[J]. Nuclear Physics A, 2000, **672**(1): 99-110.
- [273] A. J. Pacheco, J. O. Fernández Niello, D. E. DiGregorio, *et al.* Capture reactions in the $^{40,48}\text{Ca} + ^{197}\text{Au}$ and $^{40,48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ systems[J]. Physical Review C, 1992, **45**: 2861-2869.
- [274] A. Stefanini, G. Montagnoli, R. Silvestri, *et al.* How does fusion hindrance show up in medium-light systems? The case of $^{48}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$ [J]. Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 2009, **679**(2): 95-99.
- [275] A. M. Stefanini, F. Scarlassara, S. Beghini, *et al.* Fusion of $^{48}\text{Ca} + ^{90,96}\text{Zr}$ above and below the Coulomb barrier[J]. Physical Review C, 2006, **73**: 034606.
- [276] E. Prokhorova, A. Bogachev, M. Itkis, *et al.* The fusion – fission and quasi-fission processes in the reaction $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ at energies near the Coulomb barrier[J]. Nuclear Physics A, 2008, **802**(1): 45-66.
- [277] N. V. Prasad, A. Vinodkumar, A. Sinha, *et al.* Study of transfer channel coupling and entrance channel effects for the near and sub-barrier fusion of $^{46}\text{Ti} + ^{64}\text{Ni}$, $^{50}\text{Ti} + ^{60}\text{Ni}$ and $^{19}\text{F} + ^{93}\text{Nb}$ systems[J]. Nuclear Physics A, 1996, **603**.

- [278] P. H. Stelson, H. J. Kim, M. Beckerman, *et al.* Fusion cross sections for $^{46,50}\text{Ti} + ^{90}\text{Zr}, ^{93}\text{Nb}$ and some systematics of heavy-ion fusion at barrier and subbarrier energies[J]. Physical Review C, 1990, **41**: 1584-1599.
- [279] A. M. Stefanini, G. Montagnoli, L. Corradi, *et al.* Near-barrier fusion and barrier distribution of $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ [J]. Physical Review C, 2010, **81**: 037601.
- [280] A. M. Stefanini, G. Montagnoli, L. Corradi, *et al.* Fusion hindrance for $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ [J]. Physical Review C, 2010, **82**: 014614.
- [281] A. M. Stefanini, G. Montagnoli, L. Corradi, *et al.* Fusion of $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ and $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ below the Coulomb barrier[J]. Physical Review C, 2015, **92**: 064607.
- [282] M. Beckerman, J. Ball, H. Enge, *et al.* Near- and sub-barrier fusion of ^{58}Ni with ^{58}Ni [J]. Physical Review C, 1981, **23**: 1581-1589.
- [283] A. M. Stefanini, D. Ackermann, L. Corradi, *et al.* Influence of Complex Surface Vibrations on the Fusion of $^{58}\text{Ni} + ^{60}\text{Ni}$ [J]. Physical Review Letters, 1995, **74**: 864-867.
- [284] D. Ackermann, P. Bednarczyk, L. Corradi, *et al.* Cross sections and average angular momenta in the fusion of $^{28}\text{Si} + ^{94,100}\text{Mo}$ and $^{58,64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ [J]. Nuclear Physics A, 1996, **609**(1): 91-107.
- [285] M. Beckerman, M. Salomaa, A. Sperduto, *et al.* Dynamic Influence of Valence Neutrons upon the Complete Fusion of Massive Nuclei[J]. Physical Review Letters, 1980, **45**: 1472-1475.
- [286] F. Scarlassara, S. Beghini, F. Soramel, *et al.* Fusion and quasi-elastic transfer in the systems $^{58}\text{Ni} + ^{90,91,94}\text{Zr}$ near the Coulomb barrier[J]. Zeitschrift für Physik A, 1991, **338**: 171-181.
- [287] K. Rehm, H. Esbensen, J. Gehring, *et al.* Sub-barrier fusion cross sections in $^{58,64}\text{Ni} + ^{92,100}\text{Mo}$ studied with the gas-filled magnet technique[J]. Physics Letters. B. Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, 1993, **317**(1): 31-35.
- [288] F. L. H. Wolfs. Fission and deep-inelastic scattering yields for $^{58}\text{Ni} + ^{112,124}\text{Sn}$ at energies around the barrier[J]. Physical Review C, 1987, **36**: 1379-1386.
- [289] K. T. Lesko, W. Henning, K. E. Rehm, *et al.* Fission following fusion of $\text{Ni} + \text{Sn}$ [J]. Physical Review C, 1986, **34**: 2155-2164.
- [290] C. L. Jiang, A. M. Stefanini, H. Esbensen, *et al.* Fusion reactions of $^{58,64}\text{Ni} + ^{124}\text{Sn}$ [J]. Physical Review C, 2015, **91**: 044602.
- [291] M. Beckerman, M. Salomaa, A. Sperduto, *et al.* Sub-barrier fusion of $^{58,64}\text{Ni}$ with ^{64}Ni and ^{74}Ge [J]. Physical Review C, 1982, **25**: 837-849.
- [292] D. Ackermann, F. Scarlassara, P. Bednarczyk, *et al.* Mean angular momenta in heavy ion fusion[J]. Nuclear Physics A, 1995, **583**: 129-134.

- [293] C. L. Jiang, K. E. Rehm, R. V. F. Janssens, *et al.* Influence of Nuclear Structure on Sub-Barrier Hindrance in Ni + Ni Fusion[J]. Physical Review Letters, 2004, **93**: 012701.
- [294] A. Stefanini, L. Corradi, D. Ackermann, *et al.* Cross sections and mean angular momenta for $^{64}\text{Ni} + ^{92,96}\text{Zr}$ fusion near and below the Coulomb barrier[J]. Nuclear Physics A, 1992, **548**(3): 453-470.
- [295] W. S. Freeman, H. Ernst, D. F. Geesaman, *et al.* Neutron-Excess Dependence of Fusion—Ni + Sn[J]. Physical Review Letters, 1983, **50**: 1563-1566.
- [296] W. Reisdorf, F. Hessberger, K. Hildenbrand, *et al.* Fusability and fissionability in ^{86}Kr -induced reactions near and below the fusion barrier[J]. Nuclear Physics A, 1985, **444**(1): 154-188.
- [297] Z. Kohley, J. F. Liang, D. Shapira, *et al.* Near-Barrier Fusion of Sn + Ni and Te + Ni Systems: Examining the Correlation between Nucleon Transfer and Fusion Enhancement [J]. Physical Review Letters, 2011, **107**: 202701.
- [298] J. Liang, D. Shapira, C. Gross, *et al.* Enhanced evaporation residue cross sections in neutron-rich radioactive ^{132}Sn on ^{64}Ni [J]. Nuclear Physics A, 2004(746): 103-107.
- [299] J. F. Liang, D. Shapira, J. R. Beene, *et al.* Fusion of radioactive ^{132}Sn with ^{64}Ni [J]. Physical Review C, 2007, **75**: 054607.
- [300] Z. Kohley, J. F. Liang, D. Shapira, *et al.* Sub-barrier fusion enhancement with radioactive ^{134}Te [J]. Physical Review C, 2013, **87**: 064612.
- [301] D. Shapira, J. Liang, C. Gross, *et al.* Measurement of evaporation residue cross sections from reactions with radioactive neutron-rich beams[J]. The European Physical Journal A: Hadrons and Nuclei, 2005, **25**: 241-242.

附录

表：基于 MSW 公式提取的 144 个近球形体系势垒参数的实验值[131]：(包括势垒高度 V_B 、势垒分布宽度 W 和势垒半径 R_0) 及六个唯象模型计算的势垒高度值（包括 Prox 势、ETF4 势、BW91 势、Bass80 势、MWS 势、CW76 势和 V_B^{TDHF} ）值。

续表

反应体系	V_B (MeV)	W (MeV)	R_0 (fm)	Prox (MeV)	ETF4 (MeV)	BW91 (MeV)	Bass80 (MeV)	MWS (MeV)	CW76 (MeV)	V_B^{TDHF} (MeV)
$^{12}\text{C}+^{13}\text{C}$ [207]	5.63±0.03	0.52±0.02	6.82±0.15	6.51	5.78	6.09	5.95	5.7	5.88	5.91
$^{12}\text{C}+^{14}\text{C}$ [208]	5.49±0.14	0.39±0.13	6.24±0.44	6.45	5.74	6.02	5.88	5.65	5.84	5.74
$^{12}\text{C}+^{14}\text{N}$ [207]	6.90±0.06	0.64±0.01	7.64±0.30	7.57	6.73	7.12	6.95	6.66	6.81	6.95
$^{12}\text{C}+^{20}\text{Ne}$ [209]	9.80±0.06	0.88±0.03	7.66±0.23	10.45	9.39	9.84	9.67	9.31	9.41	9.45
$^{12}\text{C}+^{50}\text{Ti}$ [210]	19.72±0.31	1.20±0.60	8.12±0.52	20.46	18.95	19.39	19.2	18.71	18.77	19.23
$^{12}\text{C}+^{144}\text{Sm}$ [211]	46.83±0.19	1.54±0.22	11.63±0.40	49.02	46.78	46.97	46.72	45.65	45.98	46.91
$^{12}\text{C}+^{208}\text{Pb}$ [212]	56.34±0.05	1.26±0.05	10.59±0.04	60.81	58.32	58.08	57.78	56.53	57.51	57.82
$^{13}\text{C}+^{13}\text{C}$ [213]	5.98±0.01	0.64±0.00	8.08±0.06	6.45	5.74	6.02	5.87	5.65	5.84	5.77
$^{14}\text{N}+^{12}\text{C}$ [214]	6.90±0.06	0.64±0.01	7.64±0.27	7.57	6.73	7.12	6.95	6.66	6.81	6.95
$^{14}\text{N}+^{14}\text{N}$ [215]	7.55±0.26	0.74±0.16	6.10±0.48	8.72	7.78	8.19	8.03	7.71	7.84	7.93
$^{14}\text{N}+^{14}\text{N}$ [216]	9.64±0.04	0.88±0.01	11.93±0.16	8.72	7.78	8.19	8.03	7.71	7.84	7.93
$^{14}\text{N}+^{14}\text{N}$ [207]	8.23±0.03	0.80±0.02	8.11±0.16	8.72	7.78	8.19	8.03	7.71	7.84	7.93
$^{14}\text{N}+^{16}\text{O}$ [207]	9.23±0.05	0.83±0.02	8.70±0.24	9.85	8.82	9.26	9.09	8.75	8.86	8.95
$^{14}\text{N}+^{59}\text{Co}$ [217]	26.81±0.44	1.41±1.42	9.46±0.31	28.32	26.5	26.97	26.8	26.16	26.05	26.13
$^{15}\text{N}+^{54}\text{Fe}$ [218]	26.19±0.43	1.81±0.35	10.04±0.63	27.43	25.66	26.09	25.93	25.33	25.22	25.5
$^{16}\text{O}+^{12}\text{C}$ [219]	7.72±0.02	0.67±0.00	7.81±0.11	8.55	7.63	8.04	7.87	7.56	7.69	7.88
$^{16}\text{O}+^{13}\text{C}$ [220]	7.80±0.13	0.80±0.03	7.30±0.57	8.47	7.57	7.93	7.77	7.49	7.64	7.7
$^{16}\text{O}+^{14}\text{N}$ [214]	9.16±0.04	0.82±0.02	8.25±0.16	9.85	8.82	9.26	9.09	8.75	8.86	8.93
$^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ [221]	10.34±0.08	0.92±0.12	8.50±0.24	11.12	10.0	10.46	10.29	9.92	10.0	10.08
$^{16}\text{O}+^{16}\text{O}$ [222]	10.32±0.09	0.95±0.02	9.09±0.39	11.12	10.0	10.46	10.29	9.92	10.0	10.08
$^{16}\text{O}+^{50}\text{Ti}$ [217]	26.06±0.37	1.65±0.48	8.28±0.35	26.66	24.9	25.3	25.15	24.59	24.48	25.0
$^{16}\text{O}+^{50}\text{Ti}$ [223]	25.98±0.26	1.55±0.44	9.12±0.31	26.66	24.9	25.3	25.15	24.59	24.48	25.0
$^{16}\text{O}+^{54}\text{Fe}$ [218]	30.29±0.39	1.46±0.71	8.76±0.43	31.25	29.3	29.82	29.68	28.97	28.67	29.36
$^{16}\text{O}+^{58}\text{Ni}$ [224]	31.32±0.03	1.07±0.06	9.33±0.03	33.32	31.32	31.83	31.69	30.95	30.62	31.36
$^{16}\text{O}+^{62}\text{Ni}$ [224]	30.54±0.03	1.04±0.07	8.93±0.04	32.97	31.01	31.4	31.26	30.59	30.37	30.9
$^{16}\text{O}+^{70}\text{Ge}$ [225]	34.76±0.06	1.45±0.03	9.75±0.07	37.03	34.98	35.36	35.23	34.47	34.2	34.62
$^{16}\text{O}+^{112}\text{Sn}$ [226]	50.61±0.11	1.38±0.11	9.81±0.20	53.85	51.53	51.63	51.52	50.48	50.25	50.93
$^{16}\text{O}+^{116}\text{Sn}$ [226]	50.20±0.11	1.39±0.11	9.96±0.17	53.53	51.23	51.24	51.12	50.13	50.0	49.82

$^{16}\text{O}+^{144}\text{Sm}$ [43]	60.51±0.01	1.59±0.01	10.34±0.02	64.08	61.66	61.46	61.34	60.14	60.14	60.88
$^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ [146]	73.79±0.01	1.20±0.00	10.62±0.01	79.59	76.95	76.1	75.94	74.53	75.31	74.65
$^{16}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ [227]	74.13±0.27	1.23±0.11	10.59±0.30	79.59	76.95	76.1	75.94	74.53	75.31	74.65
$^{18}\text{O}+^{12}\text{C}$ [228]	7.43±0.17	0.35±0.48	7.34±0.24	8.41	7.53	7.87	7.72	7.44	7.61	7.69
$^{18}\text{O}+^{12}\text{C}$ [229]	7.71±0.09	0.87±0.13	7.41±0.13	8.41	7.53	7.87	7.72	7.44	7.61	7.69
$^{18}\text{O}+^{16}\text{O}$ [222]	9.90±0.09	0.85±0.06	8.07±0.38	10.94	9.88	10.24	10.09	9.77	9.9	9.75
$^{18}\text{O}+^{44}\text{Ca}$ [210]	22.44±0.18	1.37±0.27	8.35±0.21	24.32	22.7	23.01	22.84	22.4	22.37	20.96
$^{18}\text{O}+^{58}\text{Ni}$ [230]	31.68±0.31	2.85±0.27	8.02±0.20	32.86	30.98	31.28	31.14	30.54	30.33	30.5
$^{18}\text{O}+^{60}\text{Ni}$ [231]	33.77±0.58	2.72±0.29	10.69±0.59	32.69	30.82	31.08	30.93	30.37	30.21	30.17
$^{18}\text{O}+^{64}\text{Ni}$ [231]	33.29±0.42	2.36±0.21	9.77±0.45	32.35	30.53	30.72	30.53	30.03	29.98	29.9
$^{18}\text{O}+^{208}\text{Pb}$ [227]	74.14±0.28	1.33±0.10	10.80±0.31	78.69	76.27	75.18	74.83	73.75	74.72	74.01
$^{20}\text{Ne}+^{208}\text{Pb}$ [232]	94.52±0.30	2.16±0.06	11.22±0.30	97.87	95.29	93.75	93.75	92.23	92.73	92.06
$^{24}\text{Mg}+^{24}\text{Mg}$ [233]	22.07±0.11	1.09±0.29	8.57±0.06	23.01	21.27	21.84	21.69	21.13	20.89	20.82
$^{24}\text{Mg}+^{26}\text{Mg}$ [233]	20.89±0.07	1.24±0.09	8.35±0.07	22.75	21.08	21.53	21.39	20.9	20.73	20.67
$^{24}\text{Mg}+^{30}\text{Si}$ [234]	24.10±0.16	1.06±0.22	8.07±0.36	26.13	24.33	24.79	24.66	24.12	23.85	23.73
$^{28}\text{Si}+^{24}\text{Mg}$ [235]	24.51±0.10	1.09±0.14	8.13±0.18	26.39	24.53	25.1	24.97	24.36	24.01	24.67
$^{28}\text{Si}+^{24}\text{Mg}$ [233]	24.64±0.06	0.91±0.18	8.10±0.06	26.39	24.53	25.1	24.97	24.36	24.01	24.67
$^{28}\text{Si}+^{26}\text{Mg}$ [235]	24.91±0.08	1.10±0.07	8.47±0.17	26.1	24.31	24.75	24.62	24.09	23.83	24.8
$^{28}\text{Si}+^{28}\text{Si}$ [233]	29.03±0.09	1.63±0.10	8.26±0.07	30.27	28.3	28.85	28.74	28.08	27.61	29.45
$^{28}\text{Si}+^{28}\text{Si}$ [236]	29.53±0.25	1.41±0.10	9.12±0.56	30.27	28.3	28.85	28.74	28.08	27.61	29.45
$^{28}\text{Si}+^{29}\text{Si}$ [233]	28.53±0.15	1.42±0.12	8.24±0.17	30.12	28.18	28.67	28.57	27.94	27.51	28.57
$^{28}\text{Si}+^{30}\text{Si}$ [233]	28.22±0.09	1.41±0.10	8.41±0.07	29.97	28.07	28.5	28.39	27.81	27.42	28.63
$^{28}\text{Si}+^{30}\text{Si}$ [210]	28.73±0.33	1.75±0.17	8.18±0.31	29.97	28.07	28.5	28.39	27.81	27.42	28.63
$^{28}\text{Si}+^{30}\text{Si}$ [237]	28.19±0.13	1.13±0.11	8.02±0.34	29.97	28.07	28.5	28.39	27.81	27.42	28.63
$^{28}\text{Si}+^{58}\text{Ni}$ [238]	53.92±0.22	1.52±0.15	9.01±0.42	55.28	52.98	53.16	53.22	52.27	51.13	53.56
$^{28}\text{Si}+^{62}\text{Ni}$ [239]	51.33±0.42	1.22±0.14	7.86±0.90	54.72	52.48	52.47	52.52	51.68	50.74	52.72
$^{28}\text{Si}+^{64}\text{Ni}$ [239]	51.33±0.70	0.99±0.12	8.51±0.70	54.46	52.23	52.15	52.19	51.4	50.55	51.95
$^{28}\text{Si}+^{64}\text{Ni}$ [240]	50.37±0.16	1.30±0.13	7.23±0.36	54.46	52.23	52.15	52.19	51.4	50.55	51.95
$^{28}\text{Si}+^{64}\text{Ni}$ [241]	50.72±0.27	1.23±0.10	7.18±0.50	54.46	52.23	52.15	52.19	51.4	50.55	51.95
$^{28}\text{Si}+^{68}\text{Zn}$ [242]	53.43±0.21	1.39±0.12	7.47±0.21	57.88	55.63	55.49	55.55	54.71	53.78	55.36
$^{28}\text{Si}+^{68}\text{Zn}$ [243]	53.42±0.52	1.44±0.24	7.67±0.63	57.88	55.63	55.49	55.55	54.71	53.78	55.36
$^{28}\text{Si}+^{90}\text{Zr}$ [244]	72.36±0.33	2.17±0.31	10.24±0.54	74.19	71.91	71.38	71.55	70.49	69.29	72.4
$^{28}\text{Si}+^{96}\text{Zr}$ [159]	70.00±0.44	1.82±0.10	9.75±0.40	73.44	71.16	70.46	70.59	69.63	68.73	70.55
$^{28}\text{Si}+^{208}\text{Pb}$ [245]	126.74±0.34	2.15±0.10	10.88±0.22	133.36	131.3	128.21	128.58	126.83	126.68	129.85
$^{30}\text{Si}+^{24}\text{Mg}$ [235]	23.98±0.08	1.01±0.04	8.07±0.19	26.13	24.33	24.79	24.66	24.12	23.85	23.74
$^{30}\text{Si}+^{26}\text{Mg}$ [235]	24.87±0.09	1.14±0.06	9.51±0.21	25.84	24.12	24.47	24.33	23.86	23.67	24.18
$^{30}\text{Si}+^{30}\text{Si}$ [210]	28.10±0.17	0.91±0.12	8.60±0.20	29.68	27.84	28.18	28.06	27.54	27.24	28.11
$^{30}\text{Si}+^{58}\text{Ni}$ [239]	52.74±0.41	1.44±0.49	8.70±0.69	54.79	52.58	52.57	52.62	51.8	50.81	51.95

$^{30}\text{Si}+^{62}\text{Ni}$ [239]	51.94±0.37	1.42±0.24	9.57±0.62	54.24	52.09	51.93	51.93	51.22	50.43	51.61
$^{30}\text{Si}+^{64}\text{Ni}$ [239]	51.29±0.14	1.31±0.18	9.45±0.30	53.98	51.85	51.63	51.61	50.95	50.24	51.07
$^{32}\text{S}+^{12}\text{C}$ [246]	15.14±0.20	1.07±0.11	8.30±0.38	15.83	14.46	15.0	14.82	14.34	14.36	14.59
$^{32}\text{S}+^{13}\text{C}$ [246]	15.78±0.25	1.29±0.37	9.55±0.47	15.69	14.36	14.81	14.64	14.22	14.27	14.45
$^{32}\text{S}+^{24}\text{Mg}$ [247]	27.84±0.28	1.12±0.64	8.71±0.50	29.69	27.74	28.29	28.18	27.52	27.08	26.96
$^{32}\text{S}+^{26}\text{Mg}$ [247]	27.05±0.17	1.19±0.09	8.47±0.32	29.37	27.49	27.91	27.8	27.23	26.88	27.28
$^{32}\text{S}+^{48}\text{Ca}$ [248]	42.57±0.23	1.49±0.20	8.16±0.43	45.44	43.37	43.34	43.33	42.72	42.11	42.41
$^{32}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [249]	58.47±0.15	0.88±0.07	8.20±0.16	62.3	59.99	60.01	60.15	59.14	57.73	58.81
$^{32}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [239]	59.64±0.32	1.32±0.42	8.49±0.42	62.3	59.99	60.01	60.15	59.14	57.73	58.81
$^{32}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [250]	59.60±0.32	1.29±0.25	8.38±0.63	62.3	59.99	60.01	60.15	59.14	57.73	58.81
$^{32}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [249]	56.74±0.14	1.03±0.08	8.38±0.16	61.38	59.14	58.88	58.99	58.16	57.08	57.8
$^{32}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [242]	58.94±0.30	1.73±0.09	10.21±0.29	61.38	59.14	58.88	58.99	58.16	57.08	57.8
$^{32}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [243]	59.41±1.27	3.00±0.55	11.03±1.43	61.38	59.14	58.88	58.99	58.16	57.08	57.8
$^{32}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [250]	57.44±0.21	1.51±0.28	8.32±0.32	61.38	59.14	58.88	58.99	58.16	57.08	57.8
$^{32}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [239]	57.41±0.26	1.51±0.26	8.33±0.35	61.38	59.14	58.88	58.99	58.16	57.08	57.8
$^{32}\text{S}+^{90}\text{Zr}$ [172]	79.37±0.03	1.68±0.02	10.40±0.02	83.67	81.48	80.65	80.92	79.8	78.28	79.61
$^{32}\text{S}+^{96}\text{Zr}$ [172]	78.20±0.03	2.31±0.02	10.11±0.02	82.83	80.64	79.6	79.84	78.84	77.65	78.04
$^{32}\text{S}+^{112}\text{Sn}$ [226]	94.98±0.22	1.73±0.12	8.93±0.23	101.3	99.25	97.89	98.29	96.91	95.17	97.21
$^{32}\text{S}+^{120}\text{Sn}$ [226]	94.13±0.23	1.89±0.07	9.65±0.21	100.2	98.12	96.49	96.83	95.61	94.32	93.96
$^{32}\text{S}+^{138}\text{Ba}$ [251]	107.55±0.27	3.14±0.17	10.37±0.19	109.85	107.82	105.72	106.11	104.81	103.68	104.95
$^{34}\text{S}+^{24}\text{Mg}$ [247]	27.50±0.20	1.12±0.17	9.31±0.52	29.43	27.53	27.98	27.87	27.28	26.91	26.88
$^{34}\text{S}+^{26}\text{Mg}$ [247]	26.93±0.14	1.00±0.07	9.00±0.32	29.11	27.29	27.63	27.5	26.99	26.71	27.3
$^{34}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [239]	58.60±0.35	1.27±0.15	7.78±0.49	61.79	59.57	59.42	59.53	58.65	57.4	58.57
$^{34}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [249]	56.42±0.10	1.37±0.05	8.52±0.15	60.9	58.76	58.36	58.4	57.69	56.76	57.76
$^{34}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [239]	56.99±0.28	1.29±0.11	8.81±0.46	60.9	58.76	58.36	58.4	57.69	56.76	57.76
$^{34}\text{S}+^{208}\text{Pb}$ [252]	141.30±1.04	1.59±0.17	9.56±1.20	149.68	148.18	144.07	144.4	142.84	142.61	144.92
$^{36}\text{S}+^{48}\text{Ca}$ [253]	42.44±0.13	1.22±0.07	10.39±0.35	44.72	42.79	42.6	42.48	42.04	41.63	42.05
$^{36}\text{S}+^{48}\text{Ca}$ [254]	42.15±0.07	1.09±0.04	11.13±0.20	44.72	42.79	42.6	42.48	42.04	41.63	42.05
$^{36}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [239]	58.30±0.25	1.42±0.28	7.58±0.34	61.32	59.18	58.87	58.95	58.19	57.09	57.22
$^{36}\text{S}+^{58}\text{Ni}$ [250]	58.34±0.23	1.42±0.28	7.91±0.39	61.32	59.18	58.87	58.95	58.19	57.09	57.22
$^{36}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [250]	57.04±0.17	1.17±0.15	8.88±0.33	60.44	58.38	57.86	57.85	57.25	56.46	56.67
$^{36}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [239]	56.87±0.20	1.14±0.23	8.83±0.35	60.44	58.38	57.86	57.85	57.25	56.46	56.67
$^{36}\text{S}+^{64}\text{Ni}$ [255]	56.25±0.03	1.19±0.10	9.79±0.04	60.44	58.38	57.86	57.85	57.25	56.46	56.67
$^{36}\text{S}+^{90}\text{Zr}$ [256]	77.22±0.03	1.36±0.02	11.14±0.04	82.44	80.44	79.29	79.41	78.6	77.47	77.84
$^{36}\text{S}+^{96}\text{Zr}$ [256]	75.35±0.03	1.00±0.01	11.46±0.04	81.63	79.65	78.34	78.36	77.68	76.85	76.75
$^{36}\text{S}+^{92}\text{Mo}$ [257]	81.69±0.61	1.98±0.18	9.13±1.11	86.32	84.35	83.14	83.32	82.41	81.12	81.75
$^{36}\text{S}+^{208}\text{Pb}$ [252]	139.90±0.55	1.37±0.21	9.94±1.01	148.72	147.38	143.11	143.22	141.92	141.95	142.17
$^{35}\text{Cl}+^{24}\text{Mg}$ [258]	30.22±0.23	1.65±0.26	9.84±0.52	31.19	29.22	29.72	29.61	28.96	28.51	28.65

$^{35}\text{Cl}+^{26}\text{Mg}$ [258]	29.47±0.41	1.93±0.24	8.29±0.48	30.85	28.96	29.32	29.22	28.66	28.3	28.58
$^{35}\text{Cl}+^{58}\text{Ni}$ [259]	61.33±0.27	1.40±0.23	9.00±0.21	65.51	63.24	63.09	63.25	62.28	60.82	62.28
$^{35}\text{Cl}+^{60}\text{Ni}$ [259]	61.04±0.35	2.12±0.27	9.27±0.28	65.17	62.94	62.7	62.84	61.93	60.59	61.96
$^{35}\text{Cl}+^{62}\text{Ni}$ [259]	60.59±0.21	1.53±0.66	9.48±0.13	64.86	62.65	62.31	62.43	61.59	60.37	62.19
$^{35}\text{Cl}+^{62}\text{Ni}$ [260]	60.73±0.21	1.57±0.57	9.65±0.16	64.86	62.65	62.31	62.43	61.59	60.37	62.19
$^{35}\text{Cl}+^{62}\text{Ni}$ [259]	60.71±0.26	1.69±0.87	9.59±0.16	64.86	62.65	62.31	62.43	61.59	60.37	62.19
$^{35}\text{Cl}+^{64}\text{Ni}$ [259]	60.30±0.31	2.26±0.28	9.67±0.26	64.54	62.37	61.94	62.05	61.26	60.15	61.38
$^{37}\text{Cl}+^{24}\text{Mg}$ [258]	29.39±0.31	1.98±0.11	8.54±0.54	30.93	29.01	29.41	29.31	28.72	28.34	27.94
$^{37}\text{Cl}+^{26}\text{Mg}$ [258]	28.61±0.32	0.87±0.09	7.59±0.46	30.6	28.76	29.05	28.92	28.42	28.14	28.33
$^{37}\text{Cl}+^{59}\text{Co}$ [242]	58.36±0.11	1.48±0.09	8.74±0.15	62.5	60.36	59.97	60.04	59.3	58.23	58.34
$^{37}\text{Cl}+^{70}\text{Ge}$ [261]	66.98±0.14	1.68±0.07	8.31±0.15	72.42	70.3	69.64	69.78	68.94	67.68	68.51
$^{40}\text{Ar}+^{112}\text{Sn}$ [262]	104.77±0.14	1.86±0.04	9.43±0.11	111.18	109.56	107.37	107.72	106.63	104.99	107.69
$^{40}\text{Ar}+^{116}\text{Sn}$ [262]	104.89±0.23	1.99±0.03	9.65±0.15	110.59	108.94	106.65	106.92	105.92	104.52	106.09
$^{40}\text{Ar}+^{122}\text{Sn}$ [262]	104.55±0.15	2.13±0.03	10.38±0.11	109.73	108.04	105.62	105.79	104.92	103.84	104.04
$^{40}\text{Ar}+^{144}\text{Sm}$ [262]	125.75±0.73	2.01±0.11	9.24±0.69	132.78	131.5	128.27	128.67	127.43	125.98	129.13
$^{40}\text{Ar}+^{144}\text{Sm}$ [263]	126.44±0.49	2.86±0.19	9.38±0.47	132.78	131.5	128.27	128.67	127.43	125.98	129.13
$^{40}\text{Ar}+^{208}\text{Pb}$ [264]	158.77±1.82	3.88±1.68	10.57±0.96	165.78	164.86	159.74	160.03	158.65	158.33	160.8
$^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ [202]	53.32±0.19	1.37±0.15	9.93±0.33	56.86	54.53	54.76	54.87	53.89	52.49	53.28
$^{40}\text{Ca}+^{40}\text{Ca}$ [203]	53.51±0.17	1.31±0.12	10.15±0.40	56.86	54.53	54.76	54.87	53.89	52.49	53.28
$^{40}\text{Ca}+^{44}\text{Ca}$ [202]	52.08±0.41	1.16±0.09	8.76±0.46	56.1	53.88	53.84	53.92	53.12	51.98	51.16
$^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ [202]	51.28±0.20	1.47±0.36	7.86±0.30	55.39	53.26	52.99	53.07	52.4	51.5	51.98
$^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ [265]	51.87±0.14	1.37±0.02	8.24±0.16	55.39	53.26	52.99	53.07	52.4	51.5	51.98
$^{40}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ [144]	51.68±0.04	1.67±0.14	11.29±0.04	55.39	53.26	52.99	53.07	52.4	51.5	51.98
$^{40}\text{Ca}+^{50}\text{Ti}$ [266]	57.00±0.26	1.62±0.11	9.03±0.40	60.7	58.51	58.26	58.39	57.59	56.41	57.17
$^{40}\text{Ca}+^{58}\text{Ni}$ [267]	71.71±0.29	1.90±0.18	8.87±0.28	75.97	73.73	73.4	73.7	72.57	70.64	71.74
$^{40}\text{Ca}+^{58}\text{Ni}$ [268]	71.15±0.16	1.30±0.08	8.59±0.24	75.97	73.73	73.4	73.7	72.57	70.64	71.74
$^{40}\text{Ca}+^{60}\text{Ni}$ [267]	70.93±0.43	1.99±0.30	9.46±0.62	75.6	73.39	72.94	73.21	72.16	70.38	70.89
$^{40}\text{Ca}+^{62}\text{Ni}$ [267]	70.67±0.33	2.32±0.23	9.39±0.21	75.23	73.04	72.5	72.74	71.76	70.12	71.35
$^{40}\text{Ca}+^{62}\text{Ni}$ [267]	70.80±0.47	2.39±0.30	9.52±0.37	75.23	73.04	72.5	72.74	71.76	70.12	71.35
$^{40}\text{Ca}+^{64}\text{Ni}$ [268]	69.44±0.47	1.39±0.07	8.68±0.60	74.88	72.72	72.06	72.3	71.38	69.87	70.3
$^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ [269]	96.18±0.01	1.58±0.01	10.00±0.02	102.19	100.28	98.8	99.29	98.04	95.9	97.08
$^{40}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ [171]	96.40±0.08	1.54±0.04	9.97±0.12	102.19	100.28	98.8	99.29	98.04	95.9	97.08
$^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ [269]	94.09±0.02	2.16±0.03	9.62±0.02	101.19	99.27	97.54	97.98	96.88	95.15	95.07
$^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ [171]	94.32±0.18	2.17±0.05	9.60±0.15	101.19	99.27	97.54	97.98	96.88	95.15	95.07
$^{40}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ [270]	95.06±1.13	2.28±0.19	10.30±1.14	101.19	99.27	97.54	97.98	96.88	95.15	95.07
$^{40}\text{Ca}+^{124}\text{Sn}$ [271]	113.22±0.04	2.19±0.12	9.62±0.02	121.89	120.21	117.52	118.09	116.83	115.14	112.92
$^{40}\text{Ca}+^{124}\text{Sn}$ [272]	113.34±0.04	2.26±0.14	9.56±0.03	121.89	120.21	117.52	118.09	116.83	115.14	112.92
$^{40}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$ [273]	176.68±0.23	3.91±0.64	9.96±0.05	184.66	183.94	178.22	179.25	177.18	175.92	176.91

$^{48}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ [274]	51.51±0.08	1.10±0.04	10.43±0.19	53.99	52.09	51.53	51.4	51.02	50.56	51.12
$^{48}\text{Ca}+^{48}\text{Ca}$ [144]	51.04±0.02	0.88±0.07	10.68±0.05	53.99	52.09	51.53	51.4	51.02	50.56	51.12
$^{48}\text{Ca}+^{90}\text{Zr}$ [275]	94.70±0.03	1.78±0.02	9.86±0.02	99.79	98.18	96.12	96.3	95.6	94.26	94.56
$^{48}\text{Ca}+^{96}\text{Zr}$ [275]	93.43±0.06	1.31±0.03	10.06±0.03	98.84	97.23	95.05	95.07	94.51	93.53	93.51
$^{48}\text{Ca}+^{208}\text{Pb}$ [276]	175.49±0.54	2.89±0.20	12.53±0.46	180.79	180.58	174.29	174.37	173.34	173.21	174.78
$^{50}\text{Ti}+^{60}\text{Ni}$ [277]	77.27±0.14	1.99±0.20	9.87±0.17	80.82	78.84	77.81	78.02	77.22	75.71	77.65
$^{50}\text{Ti}+^{90}\text{Zr}$ [278]	104.29±0.19	1.37±0.07	10.05±0.21	109.42	107.89	105.61	105.97	105.09	103.27	105.79
$^{58}\text{Ni}+^{54}\text{Fe}$ [279]	91.67±0.30	1.25±0.05	9.02±0.35	95.28	93.33	92.27	92.75	91.54	89.09	91.69
$^{58}\text{Ni}+^{54}\text{Fe}$ [280]	91.90±0.05	1.33±0.01	9.41±0.04	95.28	93.33	92.27	92.75	91.54	89.09	91.69
$^{58}\text{Ni}+^{54}\text{Fe}$ [281]	91.78±0.31	1.30±0.05	8.94±0.33	95.28	93.33	92.27	92.75	91.54	89.09	91.69
$^{58}\text{Ni}+^{58}\text{Ni}$ [282]	99.19±0.33	1.47±0.08	8.09±0.33	101.73	99.88	98.61	99.18	97.89	95.22	98.17
$^{58}\text{Ni}+^{60}\text{Ni}$ [283]	97.99±0.08	1.68±0.02	8.34±0.05	101.23	99.43	98.02	98.54	97.35	94.88	97.48
$^{58}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [284]	95.43±0.33	1.98±0.70	8.49±0.38	100.31	98.56	96.91	97.35	96.35	94.22	96.41
$^{58}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [285]	96.67±0.94	1.97±0.18	8.45±0.72	100.31	98.56	96.91	97.35	96.35	94.22	96.41
$^{58}\text{Ni}+^{90}\text{Zr}$ [286]	133.74±1.53	2.18±0.34	7.76±1.06	137.21	136.2	133.08	133.96	132.58	129.51	132.78
$^{58}\text{Ni}+^{92}\text{Mo}$ [287]	138.89±0.66	2.55±0.26	8.32±0.71	143.7	142.85	139.6	140.6	139.06	135.63	140.32
$^{58}\text{Ni}+^{112}\text{Sn}$ [288]	159.52±1.81	4.67±3.97	7.53±0.55	166.51	166.29	161.85	163.08	161.36	157.68	163.54
$^{58}\text{Ni}+^{112}\text{Sn}$ [289]	165.50±3.24	7.01±6.53	7.82±0.81	166.51	166.29	161.85	163.08	161.36	157.68	163.54
$^{58}\text{Ni}+^{114}\text{Sn}$ [289]	169.67±4.40	5.54±0.82	9.13±1.08	166.08	165.83	161.3	162.47	160.84	157.34	163.03
$^{58}\text{Ni}+^{116}\text{Sn}$ [289]	166.79±5.49	5.35±4.19	9.12±1.81	165.65	165.36	160.74	161.88	160.32	157.0	161.15
$^{58}\text{Ni}+^{118}\text{Sn}$ [289]	163.22±2.53	3.19±3.15	8.15±0.74	165.21	164.91	160.22	161.29	159.8	156.67	160.73
$^{58}\text{Ni}+^{120}\text{Sn}$ [289]	163.71±2.93	3.91±4.12	8.71±0.87	164.81	164.47	159.68	160.73	159.31	156.34	159.26
$^{58}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ [289]	162.03±1.70	5.63±0.84	8.93±0.64	163.99	163.59	158.67	159.63	158.32	155.7	156.92
$^{58}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ [288]	157.46±2.02	3.99±1.77	9.44±0.88	163.99	163.59	158.67	159.63	158.32	155.7	156.92
$^{58}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ [290]	158.34±1.65	3.09±0.32	9.74±2.13	163.99	163.59	158.67	159.63	158.32	155.7	156.92
$^{64}\text{Ni}+^{58}\text{Ni}$ [291]	96.48±1.00	3.03±0.41	7.90±0.96	100.31	98.56	96.91	97.35	96.35	94.22	96.36
$^{64}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [284]	94.99±0.49	1.47±0.07	10.16±0.62	98.95	97.28	95.36	95.6	94.88	93.23	95.11
$^{64}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [291]	93.74±0.60	1.30±0.14	8.57±0.50	98.95	97.28	95.36	95.6	94.88	93.23	95.11
$^{64}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [292]	94.45±0.33	1.23±0.05	9.69±0.51	98.95	97.28	95.36	95.6	94.88	93.23	95.11
$^{64}\text{Ni}+^{64}\text{Ni}$ [293]	92.43±0.14	1.32±0.06	8.40±0.33	98.95	97.28	95.36	95.6	94.88	93.23	95.11
$^{64}\text{Ni}+^{96}\text{Zr}$ [294]	128.96±1.29	2.39±0.28	8.09±0.94	134.15	133.22	129.55	129.95	129.18	127.24	130.14
$^{64}\text{Ni}+^{92}\text{Mo}$ [287]	135.87±1.01	3.05±0.50	9.42±0.83	141.82	141.07	137.39	138.12	137.01	134.27	137.94
$^{64}\text{Ni}+^{112}\text{Sn}$ [289]	157.62±2.47	2.69±0.69	8.65±1.12	164.38	164.27	159.39	160.26	159.05	156.14	160.98
$^{64}\text{Ni}+^{114}\text{Sn}$ [289]	158.85±1.52	4.08±0.90	9.37±0.92	163.94	163.81	158.88	159.69	158.53	155.81	160.67
$^{64}\text{Ni}+^{116}\text{Sn}$ [289]	158.47±1.50	3.92±0.68	10.02±0.96	163.54	163.37	158.37	159.11	158.04	155.47	159.54
$^{64}\text{Ni}+^{118}\text{Sn}$ [295]	157.40±1.46	4.31±1.01	9.35±0.81	163.13	162.93	157.89	158.56	157.55	155.15	159.35
$^{64}\text{Ni}+^{120}\text{Sn}$ [289]	156.45±1.90	3.54±1.11	9.33±0.88	162.71	162.49	157.4	158.01	157.06	154.83	157.98
$^{64}\text{Ni}+^{122}\text{Sn}$ [289]	155.98±1.72	2.26±0.64	9.41±0.80	162.32	162.08	156.93	157.48	156.59	154.51	157.07

$^{64}\text{Ni}+^{124}\text{Sn}$ [289]	154.87 ± 0.94	2.85 ± 1.11	9.59 ± 0.53	161.94	161.66	156.46	156.95	156.11	154.2	155.64
$^{86}\text{Kr}+^{70}\text{Ge}$ [296]	133.71 ± 0.59	2.88 ± 0.08	9.10 ± 0.38	138.61	137.78	134.07	134.68	133.74	131.32	134.73
$^{124}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ [204]	113.18 ± 0.47	2.38 ± 1.64	9.66 ± 0.18	121.89	120.21	117.52	118.09	116.83	115.14	112.91
$^{124}\text{Sn}+^{48}\text{Ca}$ [204]	113.69 ± 0.23	1.80 ± 0.39	9.99 ± 0.09	119.16	117.82	114.68	114.69	114.08	113.24	112.25
$^{132}\text{Sn}+^{40}\text{Ca}$ [204]	115.24 ± 0.42	2.98 ± 0.88	11.06 ± 0.22	120.7	118.94	116.01	116.51	115.4	114.2	114.38
$^{132}\text{Sn}+^{58}\text{Ni}$ [297]	159.45 ± 0.83	4.26 ± 1.56	11.32 ± 0.52	162.45	161.91	156.75	157.55	156.45	154.48	156.26
$^{132}\text{Sn}+^{64}\text{Ni}$ [298]	151.08 ± 1.59	5.82 ± 1.00	8.23 ± 0.61	160.44	160.02	154.66	154.96	154.32	153.0	154.77
$^{132}\text{Sn}+^{64}\text{Ni}$ [299]	157.61 ± 1.78	3.08 ± 0.56	11.97 ± 0.83	160.44	160.02	154.66	154.96	154.32	153.0	154.77
$^{134}\text{Te}+^{40}\text{Ca}$ [300]	116.79 ± 0.46	2.29 ± 0.40	8.79 ± 0.28	125.28	123.6	120.58	121.14	119.93	118.53	117.0
$^{134}\text{Te}+^{64}\text{Ni}$ [301]	164.21 ± 0.79	2.66 ± 0.41	9.22 ± 0.51	166.54	166.32	160.73	161.13	160.38	158.82	161.03
$^{208}\text{Pb}+^{50}\text{Ti}$ [180]	194.55 ± 0.56	2.22 ± 2.92	7.83 ± 0.16	198.36	198.57	191.48	191.97	190.62	189.86	196.03

攻读博士学位期间取得的研究成果

- **H. Yao**, C. Li, H. B. Zhou, and N. Wang, Distinguishing fission-like events from deep inelastic collisions. *Phys. Rev. C* 109, 034608 (2024).
- **H. Yao**, H. Yang, and N. Wang, Systematic study of capture thresholds with time dependent Hartree-Fock theory. (accepted by PRC)
- M. M. Zhang, Z. Y. Zhang, Z. G. Gan, N. Wang, **H. Yao**, J. G. Wang, M. H. Huang et al., Experimental cross section study of $^{40}\text{Ca} + ^{175}\text{Lu}$: Searching for new neutron-deficient Pa isotopes. *Phys. Rev. C* 109, 014608 (2024).
- Y. Chen, **H. Yao**, M. Liu, J. L. Tian, P. W. Wen, and N. Wang, Systematic study of fusion barriers with energy dependent barrier radius. *At. Data Nucl. Data Tables* 154, 101587 (2023).
- 李涛, 姚红, 刘敏, and 王宁, 径向基函数方法在预言原子核电荷半径中的应用, 原子核物理评论 (2023).
- H. B. Zhou, Z. Y. Li, Z. G. Gan, Z. Y. Zhang, **H. Yao**, N. Wang, H. B. Yang et al. Modeling the fusion process with a modified Woods-Saxon potential in Ar 40-induced fusion reactions. *Phys. Rev. C* 105, 024328 (2022).

致 谢

时光荏苒，转眼之间，我的博士生涯即将画上句号。在此，我要向所有在我求学期间给予我帮助和支持的人表示衷心的感谢。

首先，我要特别感谢我的论文指导老师王宁教授。王老师不仅是我学术道路上的引路人，更是我生活中的良师益友。王老师学识渊博，对学术研究充满热情与执着。在我论文的选题、数据分析以及撰写过程中，王老师都倾注了大量的心血。正是王老师严谨的学术态度和无私的奉献，让我能够最终顺利地完成博士学业。除了学术上的指导，王老师更在生活上给予我无微不至的关心与照顾。王老师时常关心我的经济状况，在我遇到困难时总是给予我及时的帮助和鼓励。王老师的关爱让我感受到了家的温暖，也让我更加坚定了追求学术理想的信念。

特别感谢我的导师孟杰教授对我的无私帮助和悉心培养。在孟老师课题组学习期间，孟老师专门安排学生指导我学习 DRHBc 理论，为我提供了宝贵的学习机会。特别感谢课题组张双全老师和赵鹏巍老师对我的帮助，在与他们的日常交流中，他们渊博的学识，丰富的阅历让我获益匪浅。特别感谢张开元和王东阳同学在我学习 DRHBc 理论和程序时给予我无私的帮助。他们不仅耐心解答我的疑惑，还无私地分享了他们的学习笔记。特别感谢同办公室的任政学和吴鑫辉同学，他们不仅在学习上给我很大的帮助，还在生活上给了我极大的帮助。

特别感谢我的副导师宋春艳老师在学习和生活上对我的关心和帮助。宋老师时常关心我的学习进展，为我提供了许多宝贵的建议和指导。特别感谢耿立升老师对我生活上的关心和帮助。感谢贾永飞老师以及物理学院的其他老师们在研究生管理工作中付出了大量的辛勤劳动和心血。从课程安排、组织开题、预答辩等每一个环节都凝聚着他们的辛勤汗水。

特别感谢刘敏老师对我生活上的关心和帮助。刘老师平易近人，和蔼可亲，总是能够耐心倾听我的困惑和想法，并给予我指导和鼓励。特别感谢孙小军老师和田俊龙老师，他们不仅时常关心我的生活和学习状况，还在经济上给予我帮助。特别感谢欧立老师，他不仅在学术上对我指导和帮助，更是我在羽毛球场上的良师益友。特别感谢李涛、李成师兄和张欣蕊师姐对我生活上的帮助。还要特别感谢组里杨永栩、沈洪涛、周

厚兵等各位老师对我的帮助和关心。

特别感谢师弟师妹，在师大跟他们一起度过了许多欢乐和难忘的时光。特别感谢陈叶若溪和杨慧师妹，跟她们交流和讨论让我收获颇多，也让我的研究工作得以更快推进。特别感谢张凯、蓝秀丽、万梦婷、邹方磊、邢康、张国峰、王明琪等师弟师妹对我的帮助。

特别感谢我的妻子，这么多年以来始终如一地支持我、陪伴我，是我最坚实的后盾。在我忙于学术研究时，她默默承受着孤独和家庭的重担，给予我无尽的包容和理解。

最后，特别感谢我的父母和妹妹，是他们无条件地支持我，无论我遇到多大的困难和挫折，他们始终站在我身边，给予我最坚定的支持和鼓励。

作者简介

姚红，男，汉族，中共党员，1991年2月出生于四川省平昌县。2010年9月至2014年至6月，在安阳师范学院物理与电气工程学院攻读物理学学士学位。2014年9月至2017年6月，在广西师范大学物理科学与技术学院攻读物理学硕士学位。2018年9月进入北京航空航天大学物理学院攻读博士学位。研究领域主要包括：输运模型、熔合反应及机器学习等。博士研究生学习期间，在《Physical Review C》等国内外期刊上发表论文6篇。